

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Variables aléatoires discrètes.

1.1 Premières définitions.

[CR16], II.1-5 et [BL07], III.1

~ 6 items.

définition v.a.d. | définition loi d'une v.a.d. | définition fonction de répartition | càdlàg, limite en $\pm\infty$, en escalier pour les v.a.d. (dessin en annexe) | caractérise la loi | définition variables indépendantes

1.2 Moments.

[CR16], III.1-4

~ 10 items.

définition espérance | $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ | $\mathbb{E}[f(X)]$ | définitions moments | définition variance | propriétés diverses | inégalité Markov | inégalité Bienaymé-Tchebychev | inégalité Hölder | si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

1.3 Fonctions génératrices.

[CR16], III.5 et [GK11], IX.1

~ 5 items.

définition fonction génératrice, remarque sur le rayon | caractérise la loi | si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ | lien dérivabilité/moments | fonction génératrice de N v.a. iid

1.4 Lois usuelles.

[GK11], V.5, VI.10 et IX.1.2 et [CR16], IV.7

~ 11 items.

loi uniforme sur un ensemble fini | exemple : dé | loi de Bernoulli, lien avec Pile ou Face | espérance, variance et fonction génératrice | loi binomiale, lien avec les Bernoulli | espérance, variance et fonction génératrice | loi géométrique, lien avec les Bernoulli | espérance, variance et fonction génératrice | loi de Poisson | lien avec les binomiales : théorème des événements rares (Chabanol-Ruch) | espérance, variance et fonction génératrice

2 Théorèmes de convergence.

2.1 Modes de convergence.

[CR16], IV.1 et IV.4

~ 6 items.

définition convergence p.s. | définition convergence L^p | définition convergence en loi | théorème de Lévy | corollaire : si X_n, X à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow G_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cvs} G_X$ | caractérisation convergence en loi pour les v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

2.2 Loi des grands nombres.

[CR16], IV.2 et [Tou99], IV

~ 2 items.

loi forte des grands nombres | exemple : méthode de Monte-Carlo

2.3 Théorème central limite.

[CR16], IV.6

~ 3 items.

théorème central limite | corollaire : intervalle de confiance asymptotique | DEV bonus : TCL pour le nombre de cycles d'une permutation tirée uniformément

Dbon

Théorème. On pose $X^{\bar{n}} := X(X+1) \dots (X+n-1)$. On définit $|s(n, k)|$ les *nombre de Stirling de première espèce non signés* par : $X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall n \geq 1$ U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

1. $\sigma_n := (1 U_1) \circ \dots \circ (n U_n)$ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$;
2. Soit C_n le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à support disjoints de σ_n . Alors,
$$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!} ;$$
3. $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

[GK11], XIV.4.1.292

Remarque : variante du développement sur les nombres de Stirling, qui rentre mieux dans les leçons de probas et la 218 mais pas dans la 190.

3 Chaînes de Markov.

3.1 Définitions et premières propriétés.

[CR16], VII.1-4 et [MM22], XV

~ 6 items.

définition chaînes de Markov homogènes | $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$ définit une chaîne de Markov (Mansuy-Mneimné) | $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n)$ | $\mathbb{P}_\mu(X_n = y) = \mu P^n(y)$, $\mathbb{E}_x[f(X_n)] = P^n f(x)$ | définition temps d'arrêt, tribu $\mathcal{F}_T$ | propriété Markov forte

3.2 Exemples.

[CR16], VII.2

~ 4 items.

remarque : on représente par un graphe | diffusion d'Ehrenfest | marche aléatoire | DEV 1 : Fibonacci aléatoire

D1

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^\mathbb{N}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;
2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

3.3 Classification des états.

[CR16], VII.4-6

~ 7 items.

définition accessibilité, communication, irréductibilité | définition période, chaîne apériodique | période est une propriété de classe | définition temps d'atteinte, nombre de passage | définition état récurrent/transitoire | loi du nombre de passage selon les cas | x récurrent et $x \rightsquigarrow y \Rightarrow y$ récurrent, définition chaîne irréductible récurrente

3.4 Lois de probabilités stationnaires.

[CR16], VII.7 et VII.5

~ 5 items.

définition loi de probabilité stationnaire | exemple de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ | définition matrice ergodique, lien avec les chaînes irréductibles apériodiques à états finis | DEV 2 : Perron-Frobenius | théorème ergodique cas fini

D2

Théorème. Soit P une matrice ergodique (i.e. stochastique et $\exists k \geq 1, P^k > 0$). Alors :

1. $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(P), |\lambda| \leq 1$;
2. 1 est l'unique valeur propre de module 1, elle est de multiplicité 1 ;

3. il existe une unique loi invariante π^* pour P (i.e. vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1), ses coordonnées sont strictement positives ;

$$4. P^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}.$$

[App13], XXVII.30

Références

- [Tou99] P.S. TOULOUSE. *Thèmes de probabilités et statistique*. DUNOD, 1999. ISBN : 9782100043088.
- [BL07] P. BARBE et M. LEDOUX. *Probabilité*. EDP SCIENCES, 2007. ISBN : 9782868839312.
- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [App13] W. APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2013. ISBN : 9782351412985.
- [CR16] M.L. CHABANOL et J.J. RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ELLIPSES, 2016. ISBN : 9782340013063.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.