

Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires.

1.1 Convergence presque sûre.

[CR16], IV.1 et I.4 et [App13], XIII.6

~ 5 items.

définition convergence presque sûre | exemple | convergence p.s. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$ | Borel-Cantelli | corollaire : $\forall \varepsilon > 0, \sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty \Rightarrow$ convergence p.s.

1.2 Convergence L^p .

[CR16], IV.1

~ 2 items.

définition convergence L^p | lien entre les différentes convergences L^p

1.3 Convergence en probabilité.

[CR16], IV.1

~ 3 items.

définition convergence en proba | métrisable pour la distance $d(X, Y) = \mathbb{E}[|X - Y| \wedge 1]$

1.4 Convergence en loi.

[CR16], IV.4-5 et [App13], XIII.6

~ 8 items.

définition convergence en loi | exemple pour des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ | remarque : la limite n'est pas unique, seulement sa loi | théorème de Lévy | caractérisation par les fonctions de répartition | cas des lois à densité (Appel) | lemme de Scheffé | lemme de Slutsky

2 Liens entre les différents modes de convergence.

[CR16], IV.1 et IV.5 et [App13], XIII.4-6

~ 8 items.

tous les modes de cv sont stable par composition par une fonction continue, sauf L^p | L^p et p.s. impliquent proba | contre-exemples (Appel) | proba implique loi | contre-exemple (Appel) | proba implique p.s. à extraction près | proba et bornée dans L^r implique L^p , $p < r$ | loi vers une constante implique proba | tableau récapitulatif en annexe (Appel)

3 Loi des grands nombres et théorème central limite.

3.1 Loi des grands nombres.

[CR16], IV.2 et XII.2, [Tou99], IV

~ 6 items.

loi des grands nombres | exemple : Monte-Carlo | fonction de répartition empirique | théorème de Glivenko-Cantelli | test de Kolmogorov-Smirnov | remarque sur risque d'erreur et la loi de Kolmogorov-Smirnov

3.2 Théorème central limite.

[CR16], IV.6

~ 3 items.

théorème central limite | corollaire : intervalle de confiance asymptotique | DEV bonus : TCL pour le nombre de cycles d'une permutation tirée uniformément

Dbon

Théorème. On pose $X^{\overline{n}} := X(X+1) \dots (X+n-1)$. On définit $|s(n, k)|$ les **nombre de Stirling de première espèce non signés** par : $X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall n \geq 1$ U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

1. $\sigma_n := (1 U_1) \circ \dots \circ (n U_n)$ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$;
2. Soit C_n le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à support disjoints de σ_n . Alors,
$$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!} ;$$
3. $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

[GK11], XIV.4.1.292

Remarque : variante du développement sur les nombres de Stirling, qui rentre mieux dans les leçons de probas et la 218 mais pas dans la 190.

4 Chaînes de Markov.

4.1 Définitions et premières propriétés.

[CR16], VII.1-4 et [MM22], XV

~ 6 items.

définition chaînes de Markov homogènes | $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$ définit une chaîne de Markov (Mansuy-Mneimné) | $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n)$ | $\mathbb{P}_\mu(X_n = y) = \mu P^n(y)$, $\mathbb{E}_x[f(X_n)] = P^n f(x)$ | définition temps d'arrêt, tribu $\mathcal{F}_T$ | propriété Markov forte

4.2 Exemples.

[CR16], VII.2

~ 4 items.

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^\mathbb{N}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;
2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

4.3 Classification des états.

[CR16], VII.4-6

~ 7 items.

définition accessibilité, communication, irréductibilité | définition période, chaîne apériodique | période est une propriété de classe | définition temps d'atteinte, nombre de passage | définition état récurrent/transitoire | loi du nombre de passage selon les cas | x récurrent et $x \rightsquigarrow y \Rightarrow y$ récurrent, définition chaîne irréductible récurrente

4.4 Lois de probabilités stationnaires.

[CR16], VII.7 et VII.5

~ 5 items.

définition loi de probabilité stationnaire | exemple de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ | définition matrice ergodique, lien avec les chaînes irréductibles apériodiques à états finis | DEV 2 : Perron-Frobenius | théorème ergodique cas fini

Théorème. Soit P une matrice ergodique (i.e. stochastique et $\exists k \geq 1, P^k > 0$). Alors :

1. $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(P), |\lambda| \leq 1$;
2. 1 est l'unique valeur propre de module 1, elle est de multiplicité 1 ;
3. il existe une unique loi invariante π^* pour P (i.e. vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1), ses coordonnées sont strictement positives ;

$$4. P^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}.$$

[App13], XXVII.30

Références

- [Tou99] P.S. TOULOUSE. *Thèmes de probabilités et statistique*. DUNOD, 1999. ISBN : 9782100043088.
- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [App13] W. APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2013. ISBN : 9782351412985.
- [CR16] M.L. CHABANOL et J.J. RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ELLIPSES, 2016. ISBN : 9782340013063.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.