

Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Loi d'une variable aléatoire.

1.1 Définitions.

[CR16], II.1 et II.4-5

~ 8 items.

définition variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire | exemple : lancé de dé | définition loi conjointe, lois marginales | conjointe $\Rightarrow$ marginales, réciproque fausse | exemple discret/à densité | définition v.a. indépendantes | loi conjointe dans le cas des v.a. indépendantes | exemple discret/à densité

1.2 Lois discrètes.

[CR16], II.1 et [GK11], V.5

~ 9 items.

définition v.a. discrète | caractérisation de la loi dans ce cas | exemple : loi uniforme | exemple : Bernoulli | exemple : binomiale | exemple : géométrique | exemple : Poisson | somme de lois Poisson | loi des évènements rares

1.3 Lois à densité.

[CR16], II.1, [GK11], V.6 et [App24], IX.2

~ 9 items.

définition variable à densité | remarque : sans atomes | exemple : loi uniforme | exemple : loi gaussienne | somme de Gaussiennes (Appel) | exemple : loi exponentielle | exemple : loi de Cauchy | exemple : loi Gamma, lien avec somme de lois exponentielles (Appel) | exemple : loi du χ^2 (distributions en annexe)

1.4 Espérance d'une variable aléatoire.

[CR16], III.1

~ 4 items.

définition espérance, cas des variables entières, cas des variables à densité | théorème de transfert | exemple : binomiale, géométrique, poisson | exemple : gaussienne, exponentielle, Cauchy | définition moments

2 Fonctions caractérisant la loi.

2.1 Fonction de répartition.

[CR16], II.3

~ 5 items.

définition fonction répartition | caractérise la loi | càdlàg et limites en $\pm\infty$ | cas des v.a. à densité continue | construction de v.a. à partir de F et d'une v.a. uniforme

2.2 Fonction génératrice.

[CR16], III.5

~ 5 items.

définition fonction génératrice | caractérise la loi | fonction génératrice d'une somme indépendante | lien dérivabilité en 1^- /intégrabilité de X | (fonction génératrice d'une somme de N v.a. indépendantes)

2.3 Fonction caractéristique.

[CR16], III.6

~ 5 items.

définition fonction caractéristique, c'est une fonction continue bornée | lien avec transformée de Fourier dans le cas à densité | caractérise la loi (admis) | (fonction caractéristique d'une somme indépendante) | caractérisation de l'indépendance par la fonction caractéristique du couple

3 Convergence en loi.

3.1 Définition et premières propriétés.

[CR16], IV.4-5 et [App13], XIII.6

~ 6 items.

définition convergence en loi | exemple pour des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ | remarque : la limite n'est pas unique, seulement sa loi | théorème de Lévy | caractérisation par les fonctions de répartition | cas des lois à densité (Appel)

3.2 Théorème central limite.

[CR16], IV.6

~ 3 items.

théorème central limite | corollaire : intervalle de confiance asymptotique | DEV 1 : TCL pour le nombre de cycles d'une permutation tirée uniformément

D1

Théorème. On pose $X^{\overline{n}} := X(X+1)\dots(X+n-1)$. On définit $|s(n, k)|$ les **nombre de Stirling de première espèce non signés** par : $X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall n \geq 1$ U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

1. $\sigma_n := (1 U_1) \circ \dots \circ (n U_n)$ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$;

2. Soit C_n le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à support disjoints de σ_n . Alors,
- $$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!};$$
3. $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$

[GK11], XIV.4.1.292

Remarque : variante du développement sur les nombres de Stirling, qui rentre mieux dans les leçons de probas et la 218 mais pas dans la 190.

4 Chaînes de Markov.

4.1 Généralités.

[CR16], VII.1-4

~ 6 items.

définition chaînes de Markov homogènes | remarque : marche aléatoire sur un graphe | définition temps d'arrêt, tribu $\mathcal{F}_T$ | propriété Markov forte | exemple : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ | exemple : DEV 2 : Fibonacci aléatoire

D2

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^{\mathbb{N}}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;
2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

4.2 Lois invariantes.

[CR16], VII.4-7

~ 7 items.

définition loi invariante | exemple marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (dans la suite : chaîne de Markov à états finis) | définition communication, chaîne irréductible | définition récurrence, cas des chaînes finies irréductibles | définition chaîne apériodique via les matrices ergodiques | DEV bonus : Perron-Frobenius | théorème ergodique cas fini

Dbon

Théorème. Soit P une matrice ergodique (i.e. stochastique et $\exists k \geq 1, P^k > 0$). Alors :

1. $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(P), |\lambda| \leq 1$;

2. 1 est l'unique valeur propre de module 1, elle est de multiplicité 1 ;
3. il existe une unique loi invariante π^* pour P (i.e. vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1), ses coordonnées sont strictement positives ;

$$4. P^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}.$$

[App13], XXVII.30

Références

- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [App13] W. APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2013. ISBN : 9782351412985.
- [CR16] M.L. CHABANOL et J.J. RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ELLIPSES, 2016. ISBN : 9782340013063.
- [App24] W. APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités*. DEBOECK, 2024. ISBN : 9782807361669.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.