

Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Notion de convexité.

1.1 Ensembles convexes.

[BMP05], I.5.1

~ 10 items.

Définition ensemble convexe | exemple des espaces vectoriels/boules | convexes de $\mathbb{R}$ | intérieur/adhérence d'un convexe restent convexes | image par une fonction affine reste convexe | exemple des demi-espaces | exemple des ellipsoïdes | remarque : les deux exemples précédents sont des cas particuliers d'ensembles de niveaux de fonctions convexes.

1.2 Fonctions convexes.

[Rom23], VIII.1 et [BMP05], I.5.3

~ 15 items

Suivre le Rombaldi en rajoutant la log-convexité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et le développement 1. Regarder dans le objectif agreg pour les fonctions convexes de plusieurs variables.

Dbon

Théorème. Soit $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ définie positive et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$ l'**ellipsoïde (pleine)** associée à q centrée en C . Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors :

1. à C fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en C contenant K de volume minimal ;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

Remarque : on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

1.3 Régularité des fonctions convexes.

[Rom23], VIII.2

~ 10 items.

Suivre le Rombaldi en enlevant certains items pas trop pertinents et les items sur la minimisation dont on parlera dans une partie plus loin. Essayer aussi de généraliser les items sur $\mathbb{R}^n$ quand c'est possible.

2 Inégalités de convexité.

2.1 Inégalités réelles.

[Rom23], VIII.3.1 et VIII.3.3

~ 3 items.

Suivre le Rombaldi.

2.2 Inégalités sur les espaces L^p .

[Li13], I.1.2.2

~ 3 items.

Hölder, Minkowski et Jensen.

3 Optimisation.

3.1 Minimisation de fonctionnelles sur $\mathbb{R}^n$.

[Rom23], VIII.2 et [BMP05], I.5.4

~ 5 items.

Unicité minimum pour une fonction strictement convexe | existence minimum si convexe coercive |
point critique $\Rightarrow$ minimum (si convexe) | minimum local $\Rightarrow$ global (si convexe)

D1

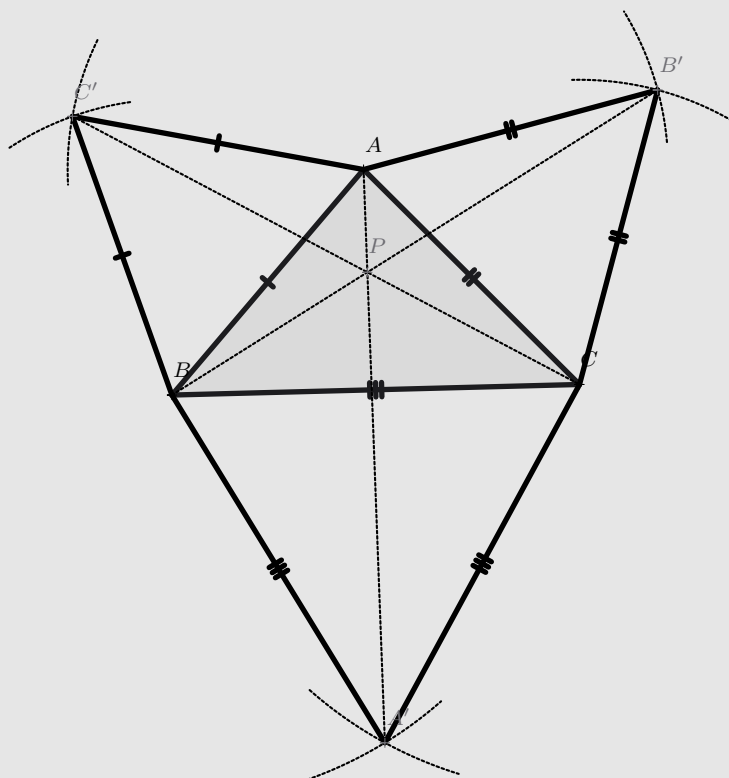
Théorème (Point de Fermat d'un triangle). Soient A , B et C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$ tels que les 3 angles du triangle ABC soient strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors,
 $M \mapsto MA + MB + MC$

1. f atteint son minimum en un unique point P (**point de Fermat** de ABC), intérieur à ABC ;
2. P est caractérisé par $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$;
3. On peut obtenir P par la construction géométrique suivante et on a $f(P) = AA' = BB' = CC'$.

[Rou15], VII.4.122

Remarque : développement beaucoup trop long, bien penser à choisir ce qu'on va dire selon la leçon.



3.2 Optimisation dans un espace de Hilbert.

[Li13], II.2 et [HL09], III.2

~ 5-10 items.

Remarque : les résultats de la partie précédente restent vrais dans un Hilbert (sauf celui avec la coercivité). Puis suivre le Li. Si on a le temps, parler de convergence faible, du théorème de Banach-Alaoglu et l'application à la minimisation d'une fonctionnelle convexe coercive sur un Hilbert.

D2

Théorème. Soit H un espace de Hilbert et $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et coercive. Alors, J admet un minimum sur H .

[IP19], 53

Références

- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.

- [Rom23] J.E. ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. EDP SCIENCES, 2023. ISBN : 9782759823390.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.