

Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

1.1 Définitions et premières propriétés.

[Can09], VII.2 et [Amr08], III.1 (penser à mettre la formule de dualité)

1.2 Exemples classiques.

[Can09], VII.3 et [Amr08], III.1.6

1.3 Formule d'inversion.

[Can09], VII.4 et [Amr08], III.1

1.4 Transformation de Fourier et convolution.

[Can09], VII.7 et [Amr08], III.1

2 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.1 Dérivation et transformation de Fourier.

[Amr08], III.1 et [Can09], VII.6

2.2 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

[Can09], VII.6 et [Amr08], III.3

2.3 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

3.1 Construction de la transformation de Fourier-Plancherel.

[Can09], VII.8.1 et [Amr08], III.2

3.2 Propriétés de la transformation de Fourier-Plancherel et calcul effectif.

[Can09], VII.8.2 et [Amr08], III.2

D1

Définition. On note $w : x \mapsto e^{-x^2}$ et $L_w^2 := \{f \in L^0(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x) dx < +\infty\}$, qui est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_w := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$ où $D = \frac{d}{dx}$. On a $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$. On note également $h_n : x \mapsto e^{-x^2} H_n(x)$.

Théorème. 1. $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = (2x - D)H_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, DH_n = 2nH_{n-1}$;
2. $(H_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de L_w^2 et $\|H_n\|_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$;
3. $(h_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de $L^2(\mathbb{R})$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (-D^2 + x^2)h_n = (2n + 1)h_n$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n$.

[Amr08], V.15 et V.35

Remarque : en tant que tel le développement est beaucoup trop long, il faut présenter uniquement 2-3 items.

4 Application.

4.1 Propriétés de localisation.

[Can09], XI

D2

Théorème. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $A := \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$ et $B := \{\xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) \neq 0\}$. Si $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$, alors $f = 0$ presque partout.

[BB24], 32

Remarque : A n'est pas bien défini mais $\lambda(A)$ oui.

4.2 Résolution d'équations aux dérivées partielles.

[Amr08], III.6

Références

- [Amr08] M. El AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.