

Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Séries de Fourier.

1.1 Notations et résultats préliminaires.

[Amr08], IV.2

~ 8 items.

définition $\mathcal{C}_{2\pi}$ espace de Banach | définition $L_{2\pi}^p$, espaces de Banach | inclusions $\mathcal{C}_{2\pi} \subseteq L_{2\pi}^q \subseteq L_{2\pi}^p$ pour $q > p$ et densité $\mathcal{C}_{2\pi} \subseteq L_{2\pi}^p$ pour $p < +\infty$ | exemple : cas de $p = 2$ | définition système trigonométrique, base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$ | définition polynôme trigonométrique | exemple : noyau de Dirichlet | définition $f * g$

1.2 Coefficients de Fourier.

[Amr08], IV.3

~ 7 items.

définition coefficients de Fourier | cas de $L_{2\pi}^2$ | exemple : polynôme trigonométrique | propriétés des coefficients de Fourier | Riemann-Lebesgue | corollaire : $c_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0$ | morphisme d'algèbre continu $\gamma : L_{2\pi}^1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$

1.3 Séries de Fourier.

[Amr08], IV.3

~ 9 items.

définition série trigonométrique, de sa convergence | remarque sur les coefficients de Fourier réels | exemple : coefficients de $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ | définition série de Fourier | exemple : développement en série de Fourier de $\frac{1}{2 + \cos x}$ | définition somme partielle | remarque : on cherche à étudier la convergence de $S_N(f)$ et en quel sens | si $\sum_{-N}^N u_n e^{inx} \xrightarrow{L_{2\pi}^1} f$, alors $u_n = c_n(f)$

2 Convergence des séries de Fourier.

2.1 Noyaux trigonométriques.

[Amr08], IV.5

~ 5 items.

définition noyau Dirichlet | propriétés du noyau de Dirichlet | définition noyau de Féjer | propriétés noyau de Féjer

2.2 Résultats de convergence.

[Amr08], IV.6

~ 9 items.

existence de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tq $\sup_{N \geq 1} |S_N(f)(0)| = +\infty$ | théorème de Féjer $\mathcal{C}_{2\pi}$ et L^p | application : théorème de Weierstrass | corollaire : injectivité coefficients de Fourier | cas de $L^2_{2\pi}$: isométrie $L^2_{2\pi} \simeq l^2(\mathbb{Z})$ | application : $\int_0^1 x^k f(x) dx = 0 \ \forall k \Rightarrow f = 0$ | lien convergence ponctuelle/valeur de la fonction | $S_N \xrightarrow{\text{cvn}} f$ pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}_{pm}^1$ | théorème de Dirichlet

2.3 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier.

[Amr08], IV.7

~ 2 items.

cas des fonctions $\mathcal{C}^p$ | réciproque

2.4 Étude de l'algèbre de Wiener.

[Arv01], I.10 (en vrai il fait pas grand chose dans la référence)

~ 5 items.

définition algèbre de Wiener | DEV 1

D1

Théorème. On note $W := \{f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$.

1. $W \subseteq \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$;

2. $(W, +, \cdot, \times, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et $\theta : W \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme iso-
 $f \mapsto (c_n(f))$
métrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur $l^1(\mathbb{Z})$ est la convolution donnée par $(a * b)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}$) ;

3. $\forall f \in W, \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$;

4. Les inclusions $(\mathcal{C}_{2\pi}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}_{2\pi}^0, \|\cdot\|_\infty)$ sont continues ;

5. (Théorème de Wiener) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f} \in W$ (i.e. W est une **sous-algèbre lisse** de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$).

[Can09], VI.4 (pas tout)

3 Applications.

3.1 Sommes de séries.

[Amr08], IV.10

~ 4 items.

$\sum \frac{1}{n^2}$ | $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ | $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ | $\sum \frac{1}{n^4}$

3.2 Traitement du signal.

[BB24]

~ 5 items.

formule sommatoire de Poisson | formule de Shannon | interprétation | DEV 2 | interprétation

D2

Théorème. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $A := \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$ et $B := \{\xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) \neq 0\}$. Si $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$, alors $f = 0$ presque partout.

[BB24], 32

Remarque : A n'est pas bien défini mais $\lambda(A)$ oui.

3.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles.

[Amr08], IV.10.15

~ 2 items.

résolution de l'équation de la chaleur | remarque sur l'unicité

Références

[Arv01] W. ARVESON. *A Short Course on Spectral Theory*. SPRINGER, 2001. ISBN : 9780387953007.

[Amr08] M. EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.

[Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.

[BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.