

Leçon 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Fonctions holomorphes.

1.1 Séries entières, fonctions analytiques.

[QQ17], II.5

~ 4 items.

définition analytique | analytique $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ | cas des séries entières | exemple de exp

1.2 Premières définitions et propriétés.

[QQ17], III.1-2

~ 6 items.

définition holomorphie | $\mathcal{A}(\Omega) \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ | Cauchy-Riemann | propriétés des fonctions holomorphes (combinaisons linéaires, produits, quotients) | exemple des fractions rationnelles | composition

1.3 Théorèmes de Cauchy.

[QQ17], III.3-4

~ 10 items.

définition courbes, lacets | exemple : lacet polygonal (dessin en annexe) | exemple : cercle (dessin en annexe) | définition intégration sur un chemin | invariant par reparamétrisation | $\int_\gamma f' = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ | Cauchy triangulaire | Cauchy convexe | remarque sur la simple connexité | Cauchy local | (Morera)

1.4 Conséquences.

[QQ17], III.4-6

~ 16 items.

$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$ | remarque : holomorphie bien plus restrictive que la dérivabilité | inégalités de Cauchy | corollaire : théorème de Liouville | application : D'Alembert-Gauss | zéros isolés | définition ordre d'un zéro | prolongement des identités | contre-exemple si les zéros s'accumulent au bord | principe du maximum | théorème de Weierstrass | remarque : $\mathcal{H}(\Omega)$ est complet (Fréchet) | identité de Parseval | définition espace de Bergman | DEV 1

D1

Théorème. Soit $B^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman du disque unité où $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On munit $B^2(\mathbb{D})$ du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{D})$ et on note $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \in B^2(\mathbb{D})$. Alors,

1. $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert ;
2. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$;
3. On pose $K : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, on a alors : $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(., w) dw$ (où $(z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$ dw est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$).

[BB24], 17

2 Fonctions méromorphes.

2.1 Premières définitions et propriétés.

[QQ17], V.1

~ 8 items.

définition singularités effaçables, pôles, essentielles | exemple | remarque : cohérent avec les pôles des fractions rationnelles | définition fonction méromorphes | bornée au voisinage de $a \Rightarrow$ singularité effaçable | définition séries de Laurent, lien avec les singularités | définition résidu | résidu de $\frac{f}{g}$

2.2 Théorème des résidus.

[QQ17], III.3, V.2 et V.4

~ 5 items.

définition indice d'un lacet | valeurs sur les composantes | théorème des résidus cas simplement connexe | exemple basique | exemples poussés (dessins en annexe)

3 Produits infinis.

[Rud20], XV

~ 8 items.

produits infinis de fonctions | produits infinis de fonctions holomorphes | définition facteurs élémentaires | unique zéro simple en 1 | DEV 2 | corollaire : $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \text{Frac}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ | remarque pour un ouvert quelconque

D2

Lemme. $\forall |z| \leq 1, \forall p \in \mathbb{N} : |1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ où $E_p(z) = (1 - z) \exp \left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \right)$.

Théorème. Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite injective sans point d'accumulation telle que $a_n \neq 0 \forall n$. Soit $m_n \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et notons (z_n) la suite où chaque a_n est répété m_n fois. Soit $f : z \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} E_n \left(\frac{z}{z_n} \right)$. Alors f est bien définie, holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ses zéros sont exactement les a_n , d'ordres respectifs m_n .

[Rud20], XV.2

Remarque : si on a du temps on peut également faire la démonstration pour un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$ mais ça nécessite d'admettre certaines choses sur les fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann. On peut également montrer comme corollaires presque immédiats de ce théorème le théorème de factorisation de Weierstrass et le fait que $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \text{Frac}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$.

Références

- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.
- [Rud20] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820542.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.