

Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Généralités.

1.1 Définitions et premiers résultats.

[Amr19], V.1-2

1.2 Fonctions développables en séries entières.

[Amr19], V.5-6

2 Régularité de la fonction somme.

2.1 Continuité, dérivabilité.

[Amr19], V.3-4

D1

Théorème (théorème taubérien d'Hardy-Littlewood). *Soit (a_n) une suite de réels positifs. Supposons que $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ (donc de rayon de convergence égal à 1). Alors, $s_n := \sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$.*

[Tit76], VII.51

2.2 Fonctions analytiques.

[QQ17], II.5

2.3 Fonctions holomorphes, théorème de Cauchy.

[QQ17], III

3 Applications.

3.1 Aux équations différentielles.

[Ber17], IV.5-6

D2

Théorème. 1. Soit y une solution maximale de $y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2$ et I son intervalle de définition, où a et b sont continues et c dérivable ne s'annulant pas sur I . Soient $t_0 \in I$ et $z(t) = \exp(-\int_{t_0}^t c(s)y(s)ds)$. Alors z est solution sur I de $z'' - (\frac{c'(t)}{c(t)} + b(t))z' + a(t)c(t)z = 0$.

2. On considère l'équation $(R_0) : y' = 2 + ty + y^2$. Posons $z_1(t) = 1 - t^2$. Alors $\exists z_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction développable en série entière de rayon infini telle que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la solution maximale y de (R_0) avec $y(0) = y_0$ est $-\frac{z'_1 - y_0 z'_2}{z_1 - y_0 z_2}$ et son intervalle de définition est la composante connexe de 0 dans $\{z_1 - y_0 z_2 \neq 0\}$.

[Ber17], IV.exo17

3.2 Séries génératrices.

[Gou21], VI.3.5-6 et VI.4 et VI.1.4

Références

- [Tit76] E.C. TITCHMARSH. *The Theory of Functions*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, USA, 1976. ISBN : 9780198533498.
- [Ber17] F. BERTHELIN. *Équations différentielles*. CASSINI, 2017. ISBN : 9782842252298.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.
- [Amr19] M. EL AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340101920.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.