

Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Suites et séries de fonctions.

1.1 Modes de convergence.

[Gou20], IV.3.1 et [HL09], I.1-2 (et [Hau07], XII-XIII pour des contre-exemples)
~ 15 items.

Suivre le Gourdon en mettant des exemples pour illustrer les différents modes de convergence. Rajouter le lemme de Dini et le théorème de Stone-Weierstrass.

1.2 Propriétés de la fonction limite.

[Gou20], IV.3.2
~ 10 items.

convexité, linéarité stables par limite simple | faux pour la continuité (contre exemple $(x \mapsto x^n)_n$) | suivre ensuite le Gourdon pour les théorèmes de continuité/dérivabilité

1.3 Application à la construction de fonctions pathologiques.

[Hau07], VIII-IX et [BP12], XIII.3
~ 3 items

Chercher 2 ou 3 fonctions dans le Hauchecorne et l'escalier de Cantor dans le Briane-Pagès.

2 Suites et séries de fonctions holomorphes.

2.1 Séries entières.

[Gou20], IV.4
~ 10 items.

définition série entière | exemple $\exp$ | définition rayon de convergence | absolue convergence et continuité sur le disque de convergence | exemple : $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ morphisme continu de groupes | f lisse sur $] - R; R[$ et $f^{(p)}$ DSE de même rayon | exemple de DSE de fonctions usuelles | lemme de convergence radiale d'Abel | DEV 1 : Hardy-Littlewood

D1

Théorème (théorème taubérien d'Hardy-Littlewood). Soit (a_n) une suite de réels positifs. Supposons que $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ (donc de rayon de convergence égal à 1). Alors, $s_n := \sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$.

2.2 Théorèmes d'holomorphie.

[QQ17], III.4.4, III.5, IV.7.4 et V.3.3

~ 5 items.

théorème de Cauchy local | zéros isolés | théorème de Weierstrass | théorème de Hurwitz

2.3 Produits infinis.

[Rud20], XV.1-2

~ 10 items.

produits infinis de fonctions holomorphes | définition des E_p les facteurs élémentaires de Weierstrass | E_p a un unique zéro simple en 1 | DEV 2 : théorème d'existence d'une fonction entière avec des zéros donnés | corollaire 1 : théorème de factorisation de Weierstrass | corollaire 2 : $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \text{Frac}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ | remarque : le théorème reste vrai si on se place sur un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$

D2

Lemme. $\forall |z| \leq 1, \forall p \in \mathbb{N} : |1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ où $E_p(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right)$.

Théorème. Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite injective sans point d'accumulation telle que $a_n \neq 0 \forall n$. Soit $m_n \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et notons (z_n) la suite où chaque a_n est répété m_n fois. Soit $f : z \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} E_n\left(\frac{z}{z_n}\right)$. Alors f est bien définie, holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ses zéros sont exactement les a_n , d'ordres respectifs m_n .

[Rud20], XV.2

Remarque : si on a du temps on peut également faire la démonstration pour un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$ mais ça nécessite d'admettre certaines choses sur les fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann. On peut également montrer comme corollaires presque immédiats de ce théorème le théorème de factorisation de Weierstrass et le fait que $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \text{Frac}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$.

Références

- [Tit76] E.C. TITCHMARSH. *The Theory of Functions*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, USA, 1976. ISBN : 9780198533498.
- [Hau07] B. HAUCHECORNE. *Les contre-exemples en mathématiques*. ELLIPSES, 2007. ISBN : 9782729834180.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [BP12] M. BRIANE et G. PAGÈS. *Analyse : Théorie de l'intégration*. VUIBERT, 2012. ISBN : 9782311007381.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [Rud20] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820542.