

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Théorèmes de régularité.

1.1 Théorèmes de continuité.

[BP12], VIII.3 et [Can09], I.4-5

1.2 Théorèmes de dérivabilité.

[BP12], VIII.3 et [Can09], I.4-5

D1

Théorème. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

[Cal24], VI.2

1.3 Théorèmes d'holomorphie.

[Can09], II.1

2 Convolution.

2.1 Définitions et premières propriétés.

[HL09], IV.3 et [BP12], XIV

2.2 Régularisation.

[HL09], IV.3 et [BP12], XIV et [Li13], III.1

3 Transformée de Fourier.

3.1 Transformée de Fourier dans L^1 .

[Amr08], III.1

D2

Théorème. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $A := \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$ et $B := \{\xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) \neq 0\}$. Si $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$, alors $f = 0$ presque partout.

[BB24], 32

Remarque : A n'est pas bien défini mais $\lambda(A)$ oui.

3.2 Transformée de Fourier dans L^2 .

[Amr08], III.2

Dbon

Définition. On note $w : x \mapsto e^{-x^2}$ et $L_w^2 := \{f \in L^0(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x) dx < +\infty\}$, qui est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_w := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$ où $D = \frac{d}{dx}$. On a $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$. On note également $h_n : x \mapsto e^{-x^2} H_n(x)$.

Théorème. 1. $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = (2x - D)H_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, DH_n = 2nH_{n-1}$;
 2. $(H_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de L_w^2 et $\|H_n\|_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$;
 3. $(h_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de $L^2(\mathbb{R})$;
 4. $\forall n \in \mathbb{N}, (-D^2 + x^2)h_n = (2n + 1)h_n$;
 5. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n$.

[Amr08], V.15 et V.35

Remarque : en tant que tel le développement est beaucoup trop long, il faut présenter uniquement 2-3 items.

Références

- [Amr08] M. EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [BP12] M. BRIANE et G. PAGÈS. *Analyse : Théorie de l'intégration*. VUIBERT, 2012. ISBN : 9782311007381.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.
- [Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.