

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Méthodes élémentaires de calcul d'intégrales.

1.1 Par primitives.

[Gou20], III.1-2

~ 4 items.

théorème fondamental de l'analyse | exemples | cas des fractions rationnelles | exemple

1.2 Par intégration par parties.

[Gou20], III.1

~ 3 items.

IPP | exemple : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ | exemple : intégrales de Wallis

1.3 Par changement de variables.

[Gou20], III.1-2

~ 4 items.

CDV | conséquences pour les fonctions paires, impaires, périodiques | exemples de calculs de primitives (fractions rationnelles en sin, cos...)

2 Cas des fonctions de plusieurs variables.

2.1 Théorème de Fubini.

[Can09], IV.1

~ 4 items.

Fubini-Tonelli | Fubini-Lebesgue | exemple : $\int \frac{\sin x}{x}$ | exemple dans les exos du Candelpergher

2.2 Changement de variables dans $\mathbb{R}^n$.

[Can09], IV.2

~ 5 items.

théorème du CDV | exemple | passage en polaire | exemple : intégrale de Gauss | exemple : intégrale

de Fresnel $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1-i}{2}$

3 Utilisation d'intégrales à paramètres.

[Can09], I.4

~ 5 items.

théorème de continuité | théorème de dérivabilité | exemple : étude de Γ | application : DEV 1 | application : transformée de Fourier de la gaussienne

D1

Théorème. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

[Cal24], VI.2

4 Calcul approché d'intégrales.

[Cal24], X.3-4 et [Gou20], III.1

~ 7 items.

définition sommes de Riemann | méthode des rectangles | méthode des trapèzes | méthode du point milieu | applications numériques | DEV 2 : quadrature de Gauss | exemple : calcul approché de π

D2

Théorème. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $I(P) := \int_{-1}^1 P(t)dt$ et on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = I(PQ)$. On notera $(P_k)_{k \geq 0}$ la base orthonormée obtenue à partir du procédé de Gram-Schmidt sur $(X^k)_{k \geq 0}$.

1. Soit $n \geq 1$. P_n possède n racines simples distinctes $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$;
2. Soient $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\lambda_i := I(L_i)$. Alors, $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = S_n(p) := \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i)$. De plus, $\lambda_i > 0$.

Corollaire. On prolonge la définition de I et S_n aux f continues. Alors, $\forall f \in \mathcal{C}^{2n}([-1; 1])$, $|I(f) - S_n(f)| \leq \frac{4M}{(2n+1)!}$ où $M = \sup_{[-1; 1]} |f^{(2n)}|$.

[Cal24], X.4

5 Théorème des résidus.

[QQ17], V.1-2 et V.4

~ 7 items.

définition DL en série de Laurent | définition résidu | $\text{Res} \left(\frac{f}{g}, a \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$ | exemple | théorème des résidus | exemples dans le Queffelec avec des dessins en annexe

Références

[Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.

[QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.

- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.