

# Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

Matei Lefebvre

2025/2026

## 1 Fonction LEBESGUE-intégrables, premières propriétés.

### 1.1 Espace des fonctions intégrables.

[BP12], VII.3

### 1.2 Théorèmes de convergence.

[BP12], VIII et [Can09], I.4 et III.5

Dbon

**Théorème.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

[Cal24], VI.2

### 1.3 Théorèmes de Fubini.

[BP12], XI et [Can09], IV.1

## 2 Espaces $L^p$ .

### 2.1 Généralités.

[HL09], IV.1 et [BP12], IX

### 2.2 Cas particulier du Hilbert $L^2$ .

[BP12], IX.6

D1

**Théorème.** Soit  $B^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$  l'espace de *Bergman* du disque unité où  $\mathbb{D}$  est le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ . On munit  $B^2(\mathbb{D})$  du produit scalaire induit par celui de  $L^2(\mathbb{D})$  et on note  $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \in B^2(\mathbb{D})$ . Alors,

1.  $B^2(\mathbb{D})$  est un espace de Hilbert;

2.  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $B^2(\mathbb{D})$  ;

3. On pose  $K : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , on a alors :  $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(.,w)dw$  (où  $(z,w) \mapsto \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$   $dw$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{D}$ ).

[BB24], 17

## 2.3 Dualité.

[HL09], IV.2 et [BP12], X

D2

**Théorème.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors :  $f$  est lipschitzienne  $\Leftrightarrow \exists g \in l^\infty(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt$ .

[Bre20], VIII.2 et [HL09], VIII.2.exo3

**Remarque :** on peut choisir de montrer la dualité  $(L^1)^* \simeq L^\infty$  mais dans ce cas il faut admettre d'autres passages techniques de la preuve.

## 2.4 Approximation par des fonctions régulières.

[HL09], IV.3, [BP12], IX.7 et XIV et [Li13], III.1

## 3 Séries de Fourier.

[Amr08], IV

Dbon

**Théorème.** On note  $W := \{f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$ .

1.  $W \subseteq \mathcal{C}^0_{2\pi}$  et  $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e_n$  ;

2.  $(W, +, ., \times, \|\cdot\|_W)$  est une algèbre de Banach et  $\theta : W \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$  est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur  $l^1(\mathbb{Z})$  est la convolution donnée par  $(a * b)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}$ ) ;

3.  $\forall f \in W, \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  où  $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n$  ;

4. Les inclusions  $(\mathcal{C}^1_{2\pi}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$  sont continues ;

5. (Théorème de Wiener) Soit  $f \in W$  ne s'annulant pas. Alors  $\frac{1}{f} \in W$  (i.e.  $W$  est une **sous-algèbre lisse** de  $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ ).

[Can09], VI.4 (pas tout)

## Références

- [Amr08] M. EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [BP12] M. BRIANE et G. PAGÈS. *Analyse : Théorie de l'intégration*. VUIBERT, 2012. ISBN : 9782311007381.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Bre20] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820283.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.
- [Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.