

Leçon 230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Séries réelles et complexes.

1.1 Généralités.

[Amr19], II.1

1.2 Séries à termes positifs.

[Amr19], II.2

1.3 Convergence dans le cas général.

[Amr19], II.3-4

D1

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^{\mathbb{N}}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;
2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

1.4 Produit de Cauchy et sommation par paquets.

[Amr19], II.5-6

2 Séries de fonctions.

2.1 Généralités.

[Amr19], IV.1-3 et [Hau07], VIII

2.2 Séries entières.

[Amr19], V

D2

Théorème (théorème taubérien d'Hardy-Littlewood). *Soit (a_n) une suite de réels positifs. Supposons que $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ (donc de rayon de convergence égal à 1). Alors, $s_n := \sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$.*

[Tit76], VII.51

2.3 Séries de Fourier.

[Amr08], IV

Dbon

Théorème. On note $W := \{f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\}$.

1. $W \subseteq \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$;
2. $(W, +, \cdot, \times, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et $\theta : W \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur $l^1(\mathbb{Z})$ est la convolution donnée par $(a * b)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m}$) ;
 $f \mapsto (c_n(f))$
3. $\forall f \in W, \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$;
4. Les inclusions $(\mathcal{C}^1_{2\pi}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ sont continues ;
5. (Théorème de Wiener) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Alors $\frac{1}{f} \in W$ (i.e. W est une **sous-algèbre lisse** de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$).

[Can09], VI.4 (pas tout)

Références

- [Tit76] E.C. TITCHMARSH. *The Theory of Functions*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, USA, 1976. ISBN : 9780198533498.
- [Hau07] B. HAUCHECORNE. *Les contre-exemples en mathématiques*. ELLIPSES, 2007. ISBN : 9782729834180
- [Amr08] M. EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.

- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [Amr19] M. EL AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340101920.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.