

# Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

## 1 Fonctions monotones.

### 1.1 Généralités.

[Rom23b], VI.5

~ 5-10 items.

définitions | exemples simples | injective  $\Leftrightarrow$  strictement monotone (si monotone) | somme, limite simple, sup, produit de fonctions croissantes (positives pour le produit) | contre-exemple pour un produit de fonctions croissantes non positives :  $x^2$  | composée de fonctions monotones | suites récurrentes

### 1.2 Régularité.

[Rom23b], VI.5

~ 5-10 items.

monotone  $\Rightarrow$  limite à gauche à droite en tout point et  $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$  | points de discontinuités dénombrables | réciproque : fonction monotone dont les pts de discontinuité sont un ensemble dénombrable donné | limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$  aux bords | caractérisation fonctions monotones continues | caractérisation de la monotonie pour les fonctions dérivables | exemple de point selle :  $x^3$

### 1.3 Un exemple : la fonction de répartition.

[App13], II.3.3

~ 5 items.

définition | càdlàg et limites en  $\pm\infty$  | v.a. discrète | v.a. à densité

## 2 Fonctions convexes.

### 2.1 Généralités.

[Rom23a], VIII.1 et [BMP05], I.5.3

~ 10 items.

définition | caractérisation par l'épigraphe | caractérisation par les cordes dans  $\mathbb{R}$  | exemples simples | lemme des 3 pentes et croissance des taux d'accroissement (Rombaldi VIII.2) | stricte log-concavité du det sur  $S_n^{++}$  | DEV 1 | log-convexité  $\Rightarrow$  convexité | Jensen version produit

**D1**

**Théorème.** Soit  $q \in Q(\mathbb{R}^n)$  définie positive et  $C \in \mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$  l'ellipsoïde (pleine) associée à  $q$  centrée en  $C$ . Soit  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compact d'intérieur non vide, alors :

1. à  $C$  fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en  $C$  contenant  $K$  de volume minimal;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant  $K$  de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

**Remarque :** on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

## 2.2 Régularité.

[Rom23a], VIII.2

~ 5 items.

continue sur l'intérieur | sur  $\mathbb{R}$  : dérivable à droite et à gauche et les dérivées à droite/gauche sont croissantes | caractérisation pour les fonctions dérivables | généralisation pour les fonctions différentiables | caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables/différentiables | exemple :  $\Gamma$  est log-convexe

## 3 Applications.

### 3.1 En analyse réelle.

[Rom23b], VI.5

~ 5 items.

strictement monotone  $\Rightarrow$  bijection | exemple : construction exponentielle, racine  $n$ -ième, fonctions trigo inverses | théorème de Dini | exemples :  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cvu} e^x$ ,  $|x|$  limite uniforme de polynômes (Hirsch-Lacombe I.1)

### 3.2 Inégalités de convexité.

[Rom23a], VIII.3.1 et VIII.3.3 et [Li13], I.1.2.2

~ 5 items.

inégalité de Young pour les réels | moyenne harmonique, géométrique et arithmétique | inégalité Jensen pour une mesure de proba | inégalité de Minkowski | inégalité de Hölder

### 3.3 Optimisation de fonctions convexes.

[Rom23a], VIII.2 et [BMP05], I.5.4

~ 6 items.

Unicité minimum pour une fonction strictement convexe | existence minimum si convexe coercive | point critique  $\Rightarrow$  minimum (si convexe) | minimum local  $\Rightarrow$  global (si convexe) | DEV 2 : point de Fermat | DEV bonus

**D2**

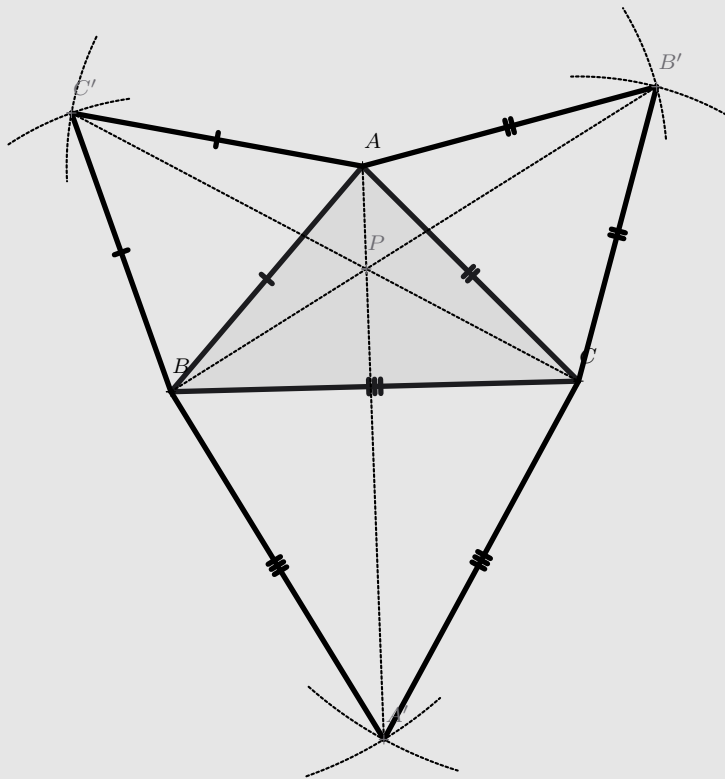
**Théorème** (Point de Fermat d'un triangle). Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés de  $\mathbb{R}^2$  tels que les 3 angles du triangle  $ABC$  soient strictement inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$ .

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Alors,  
 $M \mapsto MA + MB + MC$

1.  $f$  atteint son minimum en un unique point  $P$  (**point de Fermat** de  $ABC$ ), intérieur à  $ABC$  ;
2.  $P$  est caractérisé par  $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$  ;
3. On peut obtenir  $P$  par la construction géométrique suivante et on a  $f(P) = AA' = BB' = CC'$ .

[Rou15], VII.4.122

**Remarque** : développement beaucoup trop long, bien penser à choisir ce qu'on va dire selon la leçon.



Dbon

**Théorème.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe continue et coercive. Alors,  $J$  admet un minimum sur  $H$ .

[IP19], 53

## Références

- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.  
 [App13] W. APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2013. ISBN : 9782351412985.

- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [Rom23a] J.E. ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. EDP SCIENCES, 2023. ISBN : 9782759823390.
- [Rom23b] J.E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. DEBOECK, 2023. ISBN : 9782807349230.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.