

Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.1 Généralités.

[Rom23], VI.1-2 et [Hau07], VIII

1.2 Propriétés globales des fonctions continues.

[Rom23], I.4 et VI.4-6 et [Hau07], VIII

2 Dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.1 Généralités.

[Rom23], VII.1-2 et [Hau07], IX

2.2 Étude du graphe.

[Rom23], VII.3 et VII.5-6

2.3 Théorème de Rolle, formules de Taylor.

[Rom23], IX-X et [Hau07], IX

2.4 Régularité des intégrales à paramètres.

[Can09], I.4

Dbon

Théorème. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

[Cal24], VI.2

3 Fonctions lipschitziennes, fonctions höldériennes.

3.1 Fonctions lipschitziennes.

[HL09], I.3

D1

Théorème. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors : f est lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists g \in l^\infty(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt$.

[Bre20], VIII.2 et [HL09], VIII.2.exo3

Remarque : on peut choisir de montrer la dualité $(L^1)^* \simeq L^\infty$ mais dans ce cas il faut admettre d'autres passages techniques de la preuve.

3.2 Fonctions höldériennes.

[HL09], I.3 et [QZ20], VIII

D2

Théorème. Pour $f \in C^{0,\alpha}(I)$, le problème $\begin{cases} -u'' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution $u \in C^{2,\alpha}(I)$.

[QZ20], VIII.3.4

Références

- [Hau07] B. HAUCHECORNE. *Les contre-exemples en mathématiques*. ELLIPSES, 2007. ISBN : 9782729834180.
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Bre20] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820283.
- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [Rom23] J.E. ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. EDP SCIENCES, 2023. ISBN : 9782759823390.
- [Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.