

Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Suites récurrentes dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités.

[Amr19], I.1

1.2 Étude asymptotique.

[Amr19], I.5 et [Rou15], IV.3

D1

Théorème. 1. Si (u_n) est une suite à valeurs dans un espace métrique compact et $d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\text{adh}(u)$ est connexe ;

2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, (u_n) converge si et seulement si $|u_{n+1} - u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

3. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(u_k)$. Alors, (u_n) converge vers un point fixe de f .

[IP19], 18

1.3 Récurrences d'ordre n .

[Gou20], IV.1

2 Suites récurrentes dans un espace vectoriel.

2.1 Généralités.

[Gou20], IV.1 et [CP22], I.3.4

Dbon

Théorème. Soit P un n -gone du plan complexe que l'on assimilera au n -uplet $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ des affixes de ses sommets ordonnés. Pour $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$, on notera $F_{a,b}(P)$ le n -gone (z'_i) où $z'_i = az_i + bz_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $z'_n = az_n + bz_1$.

1. Soit (P_k) la suite de n -gones définie par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = F_{a,b}(P_k)$. Alors, (P_k) converge vers l'isobarycentre G de P .
2. Le résultat tient toujours si on a $P_{k+1} = F_{a_k,b_k}(P_k)$ avec $a_k, b_k > 0$, $a_k + b_k = 1$ et $\sum_k a_k b_k = +\infty$.

[CP22], I.3.4

2.2 Théorème de point fixe.

[Rou15], IV.2

2.3 Recherche d'éléments propres.

[Rom19], VI.1-2

3 Suites récurrentes en probabilités.

[CR16], VII et [MM22], XV

Dbon

Théorème. Soit P une matrice ergodique (i.e. stochastique et $\exists k \geq 1, P^k > 0$). Alors :

1. $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(P), |\lambda| \leq 1$;
2. 1 est l'unique valeur propre de module 1, elle est de multiplicité 1 ;
3. il existe une unique loi invariante π^* pour P (i.e. vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1), ses coordonnées sont strictement positives ;

$$4. P^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}.$$

[App13], XXVII.30

D2

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^{\mathbb{N}}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;

2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

Références

- [App13] W. APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2013. ISBN : 9782351412985.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [CR16] M.L. CHABANOL et J.J. RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ELLIPSES, 2016. ISBN : 9782340013063.
- [Amr19] M. EL AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340101920.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [Rom19] J.E. ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP SCIENCES, 2019. ISBN : 9782759823413.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.