

Leçon 223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1 Convergence des suites numériques.

1.1 Notion de limite.

Définition 1. On dit que u est **bornée** lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Définition 2. Soit $l \in \mathbb{K}$. On dit que u **admet l pour limite**, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Exemple 3. $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Théorème 4 (unicité de la limite). $(u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l_1) \wedge (u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l_2) \Rightarrow l_1 = l_2$

Définition 5. On dit que u est **convergente** si elle admet une (unique) limite. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque 6. Les notions présentées sont des notions asymptotiques : elle ne dépendent pas du changement d'un nombre fini de termes de la suite.

Proposition 7. *convergente* $\Rightarrow$ *bornée*.

Contre-exemple 8. $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais n'est pas convergente.

Proposition 9. Supposons que u et v soient deux suites numériques ayant pour limites respectives l et $l' \in \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

- $u_n + \lambda v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + \lambda l'$;
- $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} ll'$.

Si de plus $l' \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ APCR et

- $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{l}{l'}$.

Définition 10. On dit que u est **de Cauchy** lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| < \varepsilon$.

Proposition 11. *convergente* $\Rightarrow$ *de Cauchy* $\Rightarrow$ *bornée*

Théorème 12 (Complétude de $\mathbb{K}$, admis). La réciproque de la première implication est vraie.

1.2 Cas des suites réelles.

Ici, u est une suite à valeurs réelles.

Proposition 13. Soit v une autre suite réelle. Si u et v convergent respectivement vers l et l' et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, alors : $l \leq l'$.

Proposition 14. Si v et w sont deux suites réelles ayant une même limite l et si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n$, alors : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

Définition 15. On dit que u **tend vers** $+\infty$ (**resp.** $-\infty$) lorsque :
 $\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \geq A$ (**resp.** $u_n \leq -A$). On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (**resp.** $-\infty$) ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ (**resp.** $-\infty$).

Définition 16. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la **droite réelle achevée**. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ des opérations et de l'ordre usuels. On peut alors étendre la notion de convergence aux suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 17. On suppose ici que u est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que u est **croissante** (**resp.** **décroissante**) lorsque : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$ (**resp.** $u_{n+1} \leq u_n$). Dans les deux cas, on dit que u est **monotone**.

Proposition 18. Toute suite monotone dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ (possiblement vers $\pm\infty$).

Proposition 19 (Suites adjacentes). Soient u et v deux suites dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec u croissante et v décroissante. On suppose que u et v prennent uniquement des valeurs réelles APCR et que $|u_n - v_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Alors, u et v convergent vers une même limite.

Exemple 20. On se replace dans le cas où u est à valeurs réelles :

- $\left(\sup_{k \geq n} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante dans $\overline{\mathbb{R}}$;
- $\left(\inf_{k \geq n} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 21. Les limites des deux suites précédentes sont respectivement appelées **limite supérieure** et **limite inférieure** de u . On les note $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Proposition 22. $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Proposition 23. u converge (dans $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow -\infty < \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n < +\infty$.

1.3 Comparaison de suites.

On se replace dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 24. Soient u et v deux suites numériques. On dit que u est **dominée** par v , et on note $u_n = O(v_n)$, lorsque : $\exists A \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n| \leq A|v_n|$. On dit également que u est **négligeable** devant v , et on note $u_n = o(v_n)$, lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

Exemple 25. $u_n = O(1) \Leftrightarrow u$ est bornée ; $u_n = o(1) \Leftrightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Proposition 26. Soient u et v deux suites numériques, alors :

- u dominée par $v \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tq $u_n = \alpha_n v_n$ APCR.
- u négligeable devant $v \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tq $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n = \alpha_n v_n$ APCR.

Proposition/Définition 27. Soient u et v deux suites numériques. On dit qu'elles sont **équivalentes** lorsque $u - v$ est négligeable devant v . Dans ce cas, $u - v$ est également négligeable devant u .

Proposition 28. Soient u et v deux suites numériques. Alors u et v sont équivalentes $\Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tq $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_n = \alpha_n v_n$ APCR.

2 Valeurs d'adhérence et critère de Weyl.

2.1 Valeurs d'adhérence.

Définition 29. On appelle **sous-suite** ou **suite extraite** de u toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (une telle application est appelée une **extractrice**).

Proposition 30. Si $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{K}$, alors toute suite extraite de u converge vers l .

Remarque 31. On utilise principalement la contraposée pour montrer que certaines suites sont divergentes.

Définition 32. On appelle **valeur d'adhérence** de u tout élément de $\mathbb{K}$ qui est limite d'une suite extraite de u . On note $\text{adh}(u)$ l'ensemble de ces valeurs.

Proposition 33. ASSE :

- (i) l est une valeur d'adhérence de u ;
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \mid |u_n - l| < \varepsilon$;
- (iii) $\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N}, |u_n - l| < \varepsilon\} = +\infty$.

Proposition 34. Si u est à valeurs réelles, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de $\text{adh}(u)$. Ces deux valeurs sont elles-mêmes des limites de suites extraites de u .

Proposition 35. Si u est à valeurs réelles, alors on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ monotone.

Théorème 36 (Bolzano-Weierstrass). u bornée $\Rightarrow u$ admet au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire 37. u converge $\Leftrightarrow u$ bornée et u a une unique valeur d'adhérence.

Contre-exemple 38. u définie par $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = n$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence mais ne converge pas.

Proposition 39. $\text{adh}(u)$ est fermé dans $\mathbb{K}$. En particulier, si u est bornée, $\text{adh}(u)$ est compact.

D1

Théorème 40. Si u bornée et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\text{adh}(u)$ est un connexe de $\mathbb{K}$.

Si $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ est continue et u est définie par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = u_n$, alors :
 u converge $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Application 41. Pour $\alpha > 0$, il n'existe pas de fonction $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(\alpha\sqrt{n+1}) = f(\cos(\alpha\sqrt{n}))$.

2.2 Critère de Weyl.

Ici, on suppose $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 42. Supposons u à valeurs dans $[0; 1[$. On dit que u est **équirépartie** lorsque : $\forall 0 \leq a < b \leq 1, X_n(u, [a; b[) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\#\{u_0; \dots; u_n\} \cap [a; b[}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a$.

Définition 43. On pose $\{u\} = (\{u_n\})$ la suite des parties fractionnaires des u_n . On dit que u est **équirépartie modulo 1** lorsque $\{u\}$ est équirépartie.

D2

Théorème 44 (Critère de Weyl). ASSE :

(i) u équirépartie modulo 1 ;

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 1-périodique, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(u_n) = \int_0^1 f(t) dt$;

(iii) $\forall k \neq 0, \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N e^{2i\pi k u_n} = 0$.

Exemple 45. Si $\gamma \in \mathbb{R}$, (γn) équirépartie modulo 1 $\Leftrightarrow \gamma \notin \mathbb{Q}$.

3 Séries numériques.

3.1 Convergence d'une série.

Définition 46. La suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + \dots + u_n$ est appelée **série de terme général** u_n , on la note $\sum u_n$. S_n est appelée **somme partielle d'ordre n** de la série $\sum u_n$.

Proposition 47. $u_n = S_n - S_{n-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$.

Définition 48. On dit que $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite (S_n) converge dans $\mathbb{K}$, en quel cas on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite et on l'appelle la **somme** de $\sum u_n$. Dans le cas contraire on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 49. • $\sum 2^{-n}$ converge et sa somme vaut 2 ;

• $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Définition 50. Si $\sum u_n$ converge et sa somme vaut S , on note $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le **reste d'ordre n** de la série $\sum u_n$.

Remarque 51. $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Proposition 52. On ne change pas la nature de $\sum u_n$ en changeant un nombre fini des u_n .

3.2 Séries à termes positifs.

On considère v une suite de réels positifs.

Proposition 53. Soit $\sum v_n$ converge, soit $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$, en quel cas on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 54. Si u est également positive, alors $u \leq v \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Proposition 55. $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < \infty \Rightarrow \sum u_n$ converge.

Théorème 56. Si $u_n = o(v_n)$ alors :

- $\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$;
- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Corollaire 57 (Lemme de Cesàro). $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{K} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

Application 58. Si u à valeurs strictement positives et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in]0; +\infty[$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

- [Amr19]
- [Lei00] (DEV 1)
- [IP19] (DEV 2)

Références

- [Lei00] E. LEICHTNAM. *Mathématiques Polytechnique et ENS - Analyse - Exercices corrigés*. ELLIPSES, 2000. ISBN : 9782729879815.
- [Amr19] M. EL AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340101920.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.