

Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Optimisation de fonction continues et convexes.

1.1 Optimisation des fonctions continues.

[Que25], III.2, [Gou20], I.3 et [BMP05], I.6

1.2 Optimisation des fonctions convexes.

[Rom23], VIII.1-2 et [BMP05], I.5.4

D1

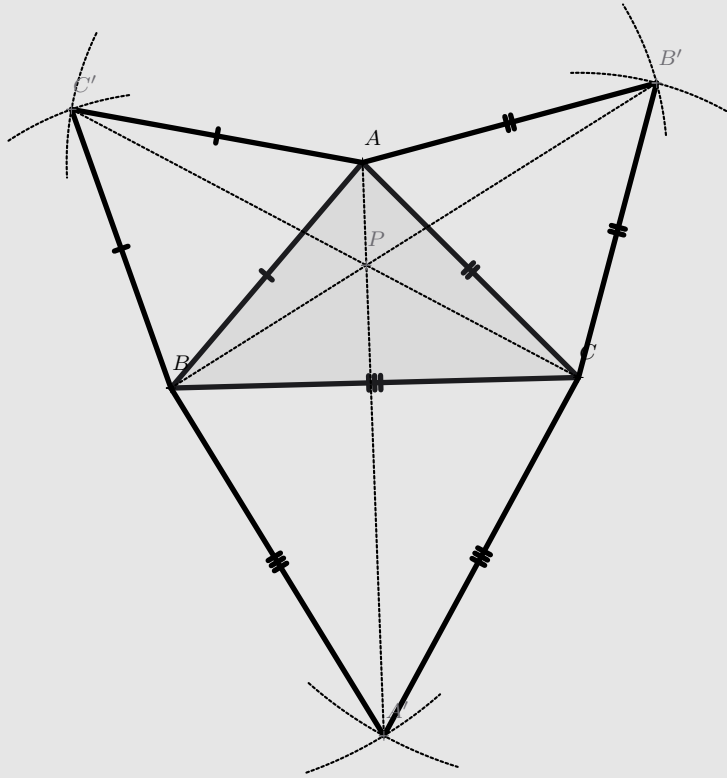
Théorème (Point de Fermat d'un triangle). *Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$ tels que les 3 angles du triangle ABC soient strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors,
$$M \mapsto MA + MB + MC$$

- 1. f atteint son minimum en un unique point P (**point de Fermat** de ABC), intérieur à ABC ;*
- 2. P est caractérisé par $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$;*
- 3. On peut obtenir P par la construction géométrique suivante et on a $f(P) = AA' = BB' = CC'$.*

[Rou15], VII.4.122

Remarque : développement beaucoup trop long, bien penser à choisir ce qu'on va dire selon la leçon.



Dbon

Théorème. Soit $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ définie positive et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$ l'ellipsoïde (pleine) associée à q centrée en C . Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors :

1. à C fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en C contenant K de volume minimal;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

Remarque : on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

2 Optimisation des fonctions différentiables.

2.1 Conditions du premier ordre sur un ouvert.

[BMP05], I.3 et [Rou15], VII.2

2.2 Conditions du deuxième ordre sur un ouvert.

[BMP05], I.3 et [Rou15], VII.2

2.3 Optimisation sous contrainte.

[BMP05], I.3 et [Rou15], VII.2

3 Autres problèmes d'optimisation.

3.1 Problème de meilleure approximation dans l'espace des fonctions continues sur un segment.

[Che82], III.4-5, [GT96], II.IV.12 et [Dem16], II

D2

Théorème. Soit F un sev de $\mathcal{C}([a; b])$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, ASSE :

1. $\forall f \in \mathcal{C}([a; b]), \exists ! q \in F$ tq $\|f - q\|_\infty = d(f, F)$;
2. $\forall q \in F$, si q s'annule en n points distincts, alors $q = 0$.

[GT96], II.IV.12 et [Che82], III.5

3.2 Optimisation dans un Hilbert.

[Li13], II.2 et [HL09], III.2

Dbon

Théorème. Soit H un espace de Hilbert et $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et coercive. Alors, J admet un minimum sur H .

[IP19], 53

3.3 Cas des fonctions holomorphes.

[QQ17], III.6

Références

- [Che82] E.W. CHENEY. *Introduction to Approximation Theory*. CHELSEA, 1982. ISBN : 9780828403177.
- [GT96] S. GONNORD et N. TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729896942.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [Dem16] J.P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles - 4e édition*. EDP SCIENCES, 2016. ISBN : 9782759819263.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.

- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [Rom23] J.E. ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. EDP SCIENCES, 2023. ISBN : 9782759823390.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.
- [Que25] H. QUEFFÉLEC. *Topologie - 7e édition*. DUNOD, 2025. ISBN : 9782100874903.