

Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Formules de Taylor.

1.1 En dimension 1.

[Gou20], II.1

~ 5-10 items.

Théorème de Rolle, conséquence : Taylor Lagrange exact. Insister sur le fait que ça marche que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (contre ex : $t \mapsto e^{it}$). Applications : encadrement de fonctions par les dev limités, par ex $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

1.2 En dimension supérieure.

[Ave97], II.1 et IV.3

~ 5-10 items.

Inégalité de la moyenne, inégalité de Taylor Lagrange, reste intégral. Quelques applications, par ex fonction de différentielle nulle sur un connexe est constante.

1.3 Développements limités.

[Gou20], II.2

~ 5 items.

Rappeler la définition d'un dev limité si on veut puis donner Taylor Young avec les exemples de dl de fonctions usuelles. DEV 1 en application. (On peut aussi inclure cette sous-partie dans la précédente sans rappeler la def d'un dl, et en vrai c'est mieux imo.)

2 Applications à l'analyse réelle.

2.1 Développement en séries entières.

[Gou20], IV.4

~ 5 items.

Rappeler rapidement la définition d'un DSE et essayer de voir comment on peut en obtenir un via les formules de Taylor (c'est vite fait expliqué dans le Gourdon). Donner les mêmes exemples que dans la partie précédente en mode DSE (sauf tan).

2.2 Méthode de Newton.

[Rou15], IV.2 et IV.3.49

~ 2 items.

Rappeler le théorème de point fixe de Banach-Picard si on veut puis théorème de la méthode de Newton. Peut-être donner un exemple concret simple si on a le temps.

2.3 Majoration d'une erreur d'approximation.

[Dem16], II.1 et II.2

~ 10 items.

Formule qui donne la distance uniforme entre f et son polynôme interpolateur en fonction de la régularité de f et de la norme d'un polynôme π_{n+1} qui dépend de la répartition des points sur le segment (formule qui découle de Taylor Lagrange). On peut ensuite s'intéresser à la valeur asymptotique de $\|\pi_{n+1}\|_\infty$ pour différents choix de points : quelconques, équidistants, Tchebychev. Donner aussi le théorème de convergence qui découle de la formule pour une fonction DSE autour de $\frac{a+b}{2}$ et $|b-a|$ assez petit + contre exemple si $|b-a|$ trop grand : phénomène de Runge.

3 Applications à d'autres domaines.

3.1 À la géométrie différentielle.

[Rou15], VII.2 et [Laf10], I.5.4

~ 5 items.

Donner les conditions du premier et second ordre pour avoir un extrema d'une fonction $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$. Résultat plus précis au voisinage d'un point critique non dégénéré : DEV 2 (Dessins dans le lafontaine).

D1

Théorème (Lemme de Morse). Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2 f(0)) = (p, n-p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

3.2 Aux probabilités.

[GK11], XI.1-3

~ 5-10 items.

Définition de convergence en loi, exemple simple ($\mathcal{B}(n, p_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$ si $np_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda$). Critères équivalents : cvs de la fonction de répartition sur les points de continuité, théorème de Lévy (+ Portmanteau si on veut). TCL avec rq pour son utilisation pour des intervalles de confiance asymptotiques. Finir par le dev 2. On peut aussi parler de séries génératrices dans cette sous-partie.

D2

Théorème. On pose $X^n := X(X-1)\dots(X-n+1)$ et $X^{\bar{n}} := X(X+1)\dots(X+n-1)$. On définit $s(n, k)$ et $S(n, k)$ les **nombres de Stirling de première et deuxième espèce** respectivement par : $X^n = \sum_{k=0}^n s(n, k) X^k$ et $X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n S(n, k) X^{\bar{k}}$ ($(X^0, \dots, X^{\bar{n}})$ est une base de $\mathbb{R}[X]$). On remarque que $X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$. Les $|s(n, k)|$ sont les **nombres de Stirling de première espèce non signés**.

1. Soit Σ_n une variable aléatoire uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ et C_n le nombre de cycles à supports disjoints dans la décomposition de Σ_n . Alors, $\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!}$. En particulier, $\mathbb{E}[C_n] = H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.
2. $S(n, k)$ est le nombre de façons de partitionner $\llbracket 1; n \rrbracket$ en k sous ensembles. En particulier, $\sum_{k=0}^n S(n, k) = B_n$ où B_n est le n -ème **nombre de Bell**, comptant le nombre de façons de partitionner $\llbracket 1; n \rrbracket$.

[Gou21], VI.4.7

Remarque : développement beaucoup trop long, bien penser à choisir ce qu'on va dire selon la leçon.

Remarque pour cette leçon : dans cette leçon, ne pas faire le point 2 mais plutôt le genre de TCL.

Références

- [Ave97] A. AVEZ. *Calcul différentiel*. MASSON, 1997. ISBN : 9782225790799.
- [Laf10] J. LAFONTAINE. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP SCIENCES, 2010. ISBN : 9782759805723.
- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [Dem16] J.P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles - 4e édition*. EDP SCIENCES, 2016. ISBN : 9782759819263.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.