

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Différentiabilité.

1.1 Premières définitions et propriétés.

[Ave97], I.1 et I.2 et [Rou15], II.2

~ 10-15 items.

Donner les définitions de base, l'idée derrière (la Grande Idée dans le Rouvière : approximer par une partie linéaire), en quel sens ça généralise la notion de dérivée sur $\mathbb{R}$. Donner les quelques règles de calcul (produit, composée, application linéaire, bilinéaire, trace (restriction)...). Mettre aussi des exemples simples. Suivre principalement le Avez.

1.2 Dérivées partielles.

[Ave97], I.2 et [Rou15], II.2

~ 5-10 items.

Donner les définitions et des exemples illustrant les subtilités qui apparaissent en dimension plus grande (être dérivable dans toutes les directions ne suffit pas), mettre aussi des dessins en annexe si possible. Parler de la jacobienne et du gradient. Parler aussi de la généralisation des dérivées partielles : applications différentiables sur une somme directe (utile pour les fonctions implicites). Suivre principalement le Avez.

1.3 Inégalité de la moyenne.

[Ave97], II.1-3 et 5 et [Rou15], III.2

~ 5-10 items.

Suivre le Rouvière pour les énoncés du théorème de la moyenne et rajouter contre-exemple du théorème de Rolle en dimension plus grande (e^{it} par exemple), dessin en annexe. En corollaire, mettre la CNS pour être $\mathcal{C}^1$ et le théorème de Sard (dans le Avez).

1.4 Différentielles d'ordre supérieur.

[Ave97], IV.1 et IV.3 et [Rou15], VI.2

~ 10 items.

Suivre le Avez pour donner la définition de la différentielle seconde, puis son interprétation en tant qu'application bilinéaire. Généraliser aux ordres supérieurs. Donner le théorème de Schwarz et sa version aux ordres plus grands. Exemple pour des fonctions à valeurs réelles : hessienne. Donner quelques règles de calcul (pour un produit de fonctions...) et quelques exemples/contre-exemples. Finir par une ou deux formules de Taylor.

2 Géométrie différentielle.

2.1 Inversion locale et fonctions implicites.

[Ave97], III.2-5 et [Rou15], V.2-3

~ 10 items.

Donner les énoncés (Avez ou Rouvière, peu importe) d'inversion locale, inversion globale, fonctions implicites et mettre une rq pour les version $\mathcal{C}^k$. Mettre des exemples et des dessins en annexe.

D1

Théorème (Brouwer). *Toute application $\mathcal{C}^1$ de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

[GT98], II.5 et 7

Remarque : si on a le temps, expliquer comment on généralise ce théorème au cas d'une application seulement continue.

2.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

[Ave97], IX.1-2, [Rou15], V.4 et [Laf10], I.5.4.

~ 5-10 items

Donner simplement les définitions équivalentes et passer rapidement sur des exemples (différentes définitions sur la sphère..., dessins en annexe). Pareil pour l'espace tangent. Avez ou Rouvière peu importe. Lemme de Morse pour donner la forme d'une variété au voisinage d'un point critique (dessins dans le Lafontaine).

Dbon

Théorème (Lemme de Morse). *Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2f(0)) = (p, n-p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.*

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

2.3 Optimisation.

[Ave97], X.1 et [Rou15], VII.2

~ 5-10 items.

Commencer par la condition du premier ordre pour une application différentiable sur un ouvert et le développement en corollaire. Donner aussi les conditions du second ordre avec quelques exemples. (Rouvière ou Avez). Donner le théorème des extremas liés, version géométrique et version multiplieurs de Lagrange. Donner des exemples et corollaires (Rouvière).

D2

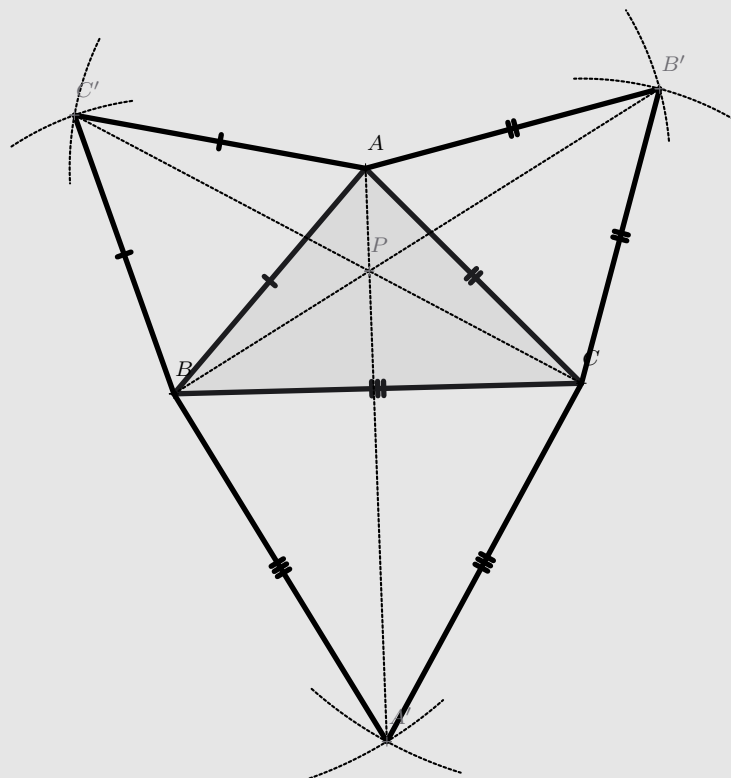
Théorème (Point de Fermat d'un triangle). *Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$ tels que les 3 angles du triangle ABC soient strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors,
$$M \mapsto MA + MB + MC$$

1. f atteint son minimum en un unique point P (**point de Fermat** de ABC), intérieur à ABC ;
2. P est caractérisé par $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$;
3. On peut obtenir P par la construction géométrique suivante et on a $f(P) = AA' = BB' = CC'$.

[Rou15], VII.4.122

Remarque : développement beaucoup trop long, bien penser à choisir ce qu'on va dire selon la leçon.



Remarque pour cette leçon : Ne pas parler du point 3 dans cette leçon et aller assez vite sur les considérations géométriques, quitte à admettre certaines choses.

3 Fonctions harmoniques.

Faire cette section que si on a le temps.

3.1 Définitions et propriétés principales.

[ABR01], I et [BMP05], II.5

~ 5 items.

Donner les définitions sur $\mathbb{R}^2$ et les théorèmes qu'on connaît dans le cas des fonctions holomorphes (formule de Cauchy (admis), principe du maximum, Liouville, analytité).

3.2 Lien avec les fonctions holomorphes.

[QQ17], III.1 et [QQ17], IV.8

~ 3-5 items.

Conditions de Cauchy-Riemann et lien holomorphie-partie réelle harmonique (réciproque dans le cas convexe pour ne pas avoir à parler de simple connexité).

Références

- [Ave97] A. AVEZ. *Calcul différentiel*. MASSON, 1997. ISBN : 9782225790799.
- [GT98] S. GONNORD et N. TOSEL. *Calcul différentiel*. ELLIPSES, 1998. ISBN : 9782729858520.
- [ABR01] S. AXLER, P. BOURDON et W. RAMEY. *Harmonic Function Theory*. SPRINGER, 2001. ISBN : 9780387952185.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005. ISBN : 9782914010924.
- [Laf10] J. LAFONTAINE. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP SCIENCES, 2010. ISBN : 9782759805723.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.