

Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Inversion d'applications différentiables.

1.1 Notion de difféomorphisme.

[Ave97], III.1

~ 10 items.

définitions et exemple (suivre le Avez), rajouter définition difféomorphisme local.

1.2 Théorème d'inversion locale.

[Ave97], III.2-4 et [Rou15], V.2

~ 10 items.

énoncé du théorème (local et global), dans le Avez pour la version générale sur un Banach et plutôt dans le Rouvière pour les énoncés en dimension finie. Rajouter des exemples/contre-exemples des 2 livres (prendre dans les exemples du Rouvière).

Dbon

Théorème. 1. $\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), A \in \exp(\mathbb{C}[A])$. En particulier, $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective ;

2. $\exp(M_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^2$.

[IP19], 63 et [Zav13], III.9

D1

Théorème (Brouwer). Toute application $\mathcal{C}^1$ de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

[GT98], II.5 et 7

Remarque : si on a le temps, expliquer comment on généralise ce théorème au cas d'une application seulement continue.

1.3 Théorème des fonctions implicites.

[Ave97], III.5 et [Rou15], V.3

~ 10 items.

pareil que dans la sous-section précédente.

2 Étude locale d'applications différentiables.

2.1 Système de coordonnées locales.

[Ave97], VIII.1

~ 5-10 items.

suivre le Avez en organisant en items.

2.2 Formes normales.

[Ave97], VIII.2 et VIII.3, [Rou15], VI.2 et [Laf10], I.5.4

~ 10 items.

pareil et Rouvière pour le lemme de Morse (exo 114) (dessins dans le Lafontaine).

D2

Théorème (Lemme de Morse). *Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2f(0)) = (p, n-p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.*

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

Remarque pour cette leçon : bien détailler les moments où on utilise le théorème d'inversion locale, quitte à aller plus vite aux autres endroits.

3 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Caractérisations et premiers exemples.

[Ave97], IX.1 et [Rou15], V.4

~ 10 items.

suivre le Rouvière ou le Avez, peu importe et mettre plein d'exemples.

3.2 Espaces tangents.

[Ave97], IX.2 et [Rou15], V.4

~ 5 items.

pareil mais suivre plutôt le Avez pour les théorèmes/définitions.

3.3 Théorème des extrema liés.

[Ave97], X.1 et [Rou15], VII.2

~ 5 items.

idem, penser à donner l'interprétation "le gradient est orthogonal à l'espace tangent" pour une bonne interprétation géométrique et aussi à donner la condition du premier ordre pour une application différentiable sur un ouvert.

3.4 Applications différentiables sur une sous-variété.

[Ave97]; IX.3

~ 5 items.

suivre le Avez avec des exemples.

Références

- [Ave97] A. AVEZ. *Calcul différentiel*. MASSON, 1997. ISBN : 9782225790799.
- [GT98] S. GONNORD et N. TOSEL. *Calcul différentiel*. ELLIPSES, 1998. ISBN : 9782729858520.
- [Laf10] J. LAFONTAINE. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP SCIENCES, 2010. ISBN : 9782759805723.
- [Zav13] M. ZAVIDOVIQUE. *Un max de math*. CALVAGE&MOUNET, 2013. ISBN : 9782916352299.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.