

Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Espaces de Hilbert.

1.1 Généralités.

[Li13], II.1

1.2 Théorème de projection, conséquences.

[Li13], II.2

1.3 Bases hilbertiennes.

[Li13], II.3

D1

Théorème. Soit $B^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ l'espace de **Bergman** du disque unité où $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On munit $B^2(\mathbb{D})$ du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{D})$ et on note $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \in B^2(\mathbb{D})$. Alors,

1. $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert ;
2. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$;
3. On pose $K : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, on a alors : $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(., w) dw$ (où $(z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$ dw est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$).

[BB24], 17

2 Applications.

2.1 Séries de Fourier.

[Amr08], IV.1-6

2.2 Transformée de Fourier.

[Amr08], III.2

D2

Définition. On note $w : x \mapsto e^{-x^2}$ et $L_w^2 := \{f \in L^0(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x) dx < +\infty\}$, qui est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_w := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$ où $D = \frac{d}{dx}$. On a $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$. On note également $h_n : x \mapsto e^{-x^2} H_n(x)$.

Théorème. 1. $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = (2x - D)H_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, DH_n = 2nH_{n-1}$;
2. $(H_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de L_w^2 et $\|H_n\|_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$;
3. $(h_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de $L^2(\mathbb{R})$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (-D^2 + x^2)h_n = (2n + 1)h_n$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n$.

[Amr08], V.15 et V.35

Remarque : en tant que tel le développement est beaucoup trop long, il faut présenter uniquement 2-3 items.

2.3 Minimisation de fonctionnelles.

[HL09], 0.4 et [IP19], 53

Dbon

Théorème. Soit H un espace de Hilbert et $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et coercive. Alors, J admet un minimum sur H .

[IP19], 53

Références

- [Amr08] M. El AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*. ELLIPSES, 2008. ISBN : 9782729839031.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.