

[GK] [R]
[B] [ouv]

266: Utilisation de la notion d'indépendance

I- Notion d'indépendance

1) Evénements indépendants [GK] 52 [B] 73

- Proba conditionnelle
- événements indépendants 2 à 2 + ex
- événements mutuellement indépendants + contre exemple
- A_i indépendants $\Rightarrow A_i^c$ indépendants

2) Indépendance de tribus et de v.a [GK] 126 [R] 756

- def indépendance de tribus
- def : mutuelle indépendance de v.a
- Th: X_i indep $\Rightarrow f_i(X_i)$ indep $\forall f_i$ mesurable

II- Premières propriétés autour de l'indépendance

1) Critères d'indépendance [GK] 128 79-80 [ouv] 50

- $(X_1, \dots, X_n)$ indépendants $\Leftrightarrow P_{X_1, \dots, X_n} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$
- Prop sur l'espérance et la covariance
 $\hookrightarrow CE \text{ cov}(X, Y) = 0 \nRightarrow \text{indep}$
- $E[\prod f_i(X_i)] = \prod E[f_i(X_i)]$ X_i indep et f_i mesurable positive
- ex $X, Y \sim N(0, 1)$ calculer $E[Y(\frac{X}{Y})]$ Y positive
- Th: $X_1, \dots, X_n$ indep $\Leftrightarrow E[\prod f_i(X_i)] = \prod E[f_i(X_i)]$
 $\Leftrightarrow \phi_{X_1, \dots, X_n}(t) = \prod \phi_{X_i}(t_i)$
 $\Leftrightarrow X_i$ à valeur dans $\mathbb{N}$
 $E[r_1^{X_1} \dots r_n^{X_n}] = \prod E[r_i^{X_i}]$
- lemme de Borel Cantelli

2) Somme de v.a indépendantes [ouv] 61 [B] 86

- $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$
- $P_{X+Y} = P_X * P_Y$ $G_{X+Y} = G_X G_Y$

DEV1

- $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

- Inégalité de Hoeffding + application

III - Applications : convergence de v.a. indépendantes [B] 111

DEV2

- Critère de Borel

- LFGN

- LGN

- TCL

- Rombaldi Proba

- Proba ? Ouerard

266: Utilisation de la notion d'indépendance en probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

I- Notion d'indépendance

1) Evénements indépendants

Définition 1: Soient A, B deux événements avec P de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition 2: On dit que deux événements A et B sont indépendants sous P si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Exemple 3: On jette deux dés, un bleu et un rouge.

Les événements $A = \{\text{on obtient un nombre inférieur ou égal à 4 avec le dé rouge}\}$ et $B = \{\text{on obtient un 6 avec le dé bleu}\}$ sont indépendants.

Définition 3: Une famille quelconque d'événements $A_i \in \mathcal{A}, i \in I$ est mutuellement indépendante si pour tout $J \subset I$ fini: $P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

Remarque 4: indépendance 2 à 2 $\nRightarrow$ l'indépendance mutuelle.

$A = \{\text{le résultat du dé rouge est impair}\}$

$B = \{\text{le résultat du dé bleu est impair}\}$

$C = \{\text{la somme des deux dés est impair}\}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2 \quad P(A \cap B) = 1/4 \quad P(A \cap C) = 1/4$$

$$P(B \cap C) = 1/4 \quad \text{et} \quad P(A \cap B \cap C) = 0$$

2) Indépendance de tribus et de variables aléatoires

Définition 5: Soient B et $\mathcal{C}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$.

B et $\mathcal{C}$ sont indépendantes sous P si

$$\forall B \in B \text{ et } \forall C \in \mathcal{C} \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Définition 6: On dit que des variables $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si les tribus $(\mathcal{C}(X_i))_{i \in I}$ qu'elles engendrent sont indépendantes

Théorème 7: Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de n v.a.r indépendantes. Alors pour toute suite $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions mesurables, $(f_k(X_k))_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes

II- Premières propriétés autour de l'indépendance

1) Critères d'indépendance

Théorème 8: Soit $X_1, \dots, X_n$ v.a aléatoires. Les deux propositions sont équivalentes:

1) $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes

$$2) P(X_1, \dots, X_n) = P(X_1) \otimes \dots \otimes P(X_n)$$

Proposition 9: Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes.

1) Si X_1 et X_2 admettent une moyenne, il en est de même pour la v.a $X_1 X_2$ et $E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$

2) Si X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2, on a

$$\text{cov}(X_1, X_2) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{X_1 + X_2}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$$

Remarque 10: $\text{Cov}(X, Y) = 0 \nRightarrow X$ et Y indépendantes

exemples: si X a pour loi $P(X=1) = P(X=0) = P(X=-1) = \frac{1}{3}$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \neq 0 \\ 1 & \text{si } X = 0 \end{cases} \quad \text{Cov}(X, Y) = \frac{E[XY]}{=0} - \frac{E[X]E[Y]}{=0} = 0$$

mais X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 11: Une famille quelconque de v.a. X_i , $i \in I$ est indépendante ssi pour toute famille finie $J \subset I$ et toute famille finie de fonctions mesurables positives ϕ_i , $i \in J$ telle que $\Phi(X_i)$ soient intégrables,

$$E\left[\prod_{i \in J} \phi_i(X_i)\right] = \prod_{i \in J} E[\phi_i(X_i)]$$

Corollaire 12: La famille $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a. réelles est indépendante ssi $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Phi(X_1, \dots, X_n)(t_1, \dots, t_n) = \Phi_{X_1}(t_1) \dots \Phi_{X_n}(t_n)$$

Lemme 13 (Borel Carvelli) Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements on a:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

$$2) \text{ Si les événements } A_n \text{ sont indépendants: } \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$$

Exemple 14 point 2) est faux si les événements ne sont pas indépendants: sur $(0, 1]$, $B_{0,1/2}, B_{1/2,1}, \dots$, $A_n =]0, \frac{1}{n}]$, $P(A_n) = \frac{1}{n}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, $P(\limsup A_n) = P(0, 0) = 0$

2) Somme de v.a. indépendantes

Proposition 15: Soient X_1, X_2 deux v.a. indépendantes Alors $X_1 + X_2$ a pour loi: $P_{X_1+X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$

Proposition 16: Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors la fonction caractéristique de leur somme est donnée par:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$$

Exemple 17: $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$ alors $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$

Proposition 18: Soient X, Y deux v.a. discrètes indépendantes. Alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Proposition 19: Soient X, Y v.a. indépendantes Alors $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Théorème 20 (Inégalité de Hoeffding)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, centrées et bornées p.s.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists c_n > 0 \text{ tel que } |X_n| \leq c_n$$

$$\text{Soit } S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

$$\text{Alors } \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$$

Application 21: On se place dans les hypothèses du théorème 20. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tel que $2\alpha - \beta > 0$ On suppose $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, $\alpha - \beta$ Alors $\sum_{n=0}^{\infty} P(|S_n| > n\varepsilon) < +\infty$

III - Applications: convergence de variables indépendantes

0

[64] p 79

080

[64] p 80

Soit X une v.a. $(X_n)_n$ suite de v.a.

Théorème 22: (critère de Borel)

1) Si $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$ alors $X_n \xrightarrow{P} X$

2) Si les $(X_n)_n$ sont mutuellement indépendants, alors $X_n \rightarrow 0 \text{ p.s.} \iff \forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$

Théorème 23: (Loi faible des grands nombres)

Si les $(X_n)_n$ sont i.i.d., on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i. \text{ Supposons } \mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$$

Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1]$

Théorème 24: (Loi forte des grands nombres)

Si les $(X_n)_n$ sont i.i.d. Alors:

$$\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty \iff \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1]$$

Théorème 25: Soit $(X_n)_n$ suite de v.a. i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}[X_1] \right) \xrightarrow{\text{loi}} N(0, \text{var}(X_1)) \quad \text{DEV2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

↑
indépendance

ne donne pas d'info sur la réalisation de A

plusieurs notions

- 2 à 2
- mutuelle

266: Utilisation de la notion d'indépendance en probabilité

permet de simplifier des pb de proba pour les calculs de lois par exemples

Application Inégalité de Hoeffding
DEV 1

Application à la CV de v.a. indep

- Borel Carvelli
- LG-N
- TCL DEV 2

indép de v.a. et de tribus qui sont liés

1^{ère} caractérisation de l'indépendance

l'indépendance qualifie de manière intuitive le fait que des événements n'ont aucune influence l'un sur l'autre

Propriétés caractéristiques de l'indépendance

- $E[XY] = E[X]E[Y]$
- $Cov(X, Y) = 0$
- $E[\prod f_i(x_i)] = \prod E[f_i(x_i)]$

caractérise pas les lois A

↳ permet de calculer des lois

lien avec les gtr caractérisant les lois et sommes de v.a. indep

$$\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y \quad G_{X+Y} = G_X G_Y \quad P_{X+Y} = P_X * P_Y$$