

[GK]
[G]

264 : Variables aléatoires discrètes : exemples et applications

I- Variables aléatoires discrètes

1) Def et premières propriétés [GK] 117

- v.a., v.a. discrètes

131

Pois exemple

2) Lois discrètes usuelles [G] 341-342 [GK] 139-140

- loi uniforme, Bernoulli, Binomiale, géométrique, poisson, + exemples

3) Indépendance [G] 336

- v.a. discrètes et indep

- loi de $X_1 + X_2$ X_1, X_2 indep

↳ exemple poisson et binomiale

II- Outils pour l'étude des variables aléatoires discrètes

1) Espérance et moments [G] 337 - 341 343-344

Soient X, Y v.a. discrètes sur Ω

- Def $E[X]$

- $E[1_A] = P(A)$

- prop de l'espérance

- Th de transfert

- exemple

- Inégalité de Markov

- def moment d'ordre p

- Variance

- Inég de Hoeffding

DEV1

2) Fonction génératrice [GK] 236 - 237

- def et prop

[GK]
285-286
307

III - Convergence en loi

- def convergence en loi
- convergence en loi de v.a discrètes
- lemme de Scheffé
- cv en loi d'une Binomiale vers une Poisson
- TCL
- intervalle de confiance

Algebre proba Gourdon
De l'intégration aux proba

Kurtzmann

264: Variables aléatoires discrètes.

Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.

I- Variables aléatoires discrètes

1) Définition et premières propriétés

Définition 1: On appelle variable aléatoire toute application mesurable $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

On appelle loi d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la mesure image de P par X . Cette loi est notée P_X . $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$

Définition 2: On dit qu'une loi μ est discrète s'il existe un ensemble D fini ou dénombrable inclus dans $\mathbb{R}^1$ tel que $\mu(D) = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire X est discrète si sa loi P_X est discrète.

Proposition 3: La loi d'une variable aléatoire discrète

X est donnée par $P_X = \sum_{x \in D} p_x \delta_x$

où $x \in D$ et $p_i = P(X=i)$ $\forall i \in D$.

2) Lois discrètes usuelles

Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur Ω .

Définition 4: Si $X(\Omega) = \{1, n\}$. On dit que X suit une loi uniforme si $P(X=i) = \frac{1}{n}$ $\forall i \in \{1, n\}$. On note $X \sim \mathcal{U}(\{1, n\})$

[G] 341

Exemple 5: Cette loi correspond à la probabilité de tirer une boule dans une urne de n boules différenciées.

Définition 6: Soit $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $p \in]0, 1[$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si

$P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$. On note $X \sim \text{Ber}(p)$

Exemple 7: Le résultat d'un pile ou face suit une loi de Bernoulli.

Définition 8: $X(\Omega) = \{0, n\}$ et $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) si $\forall k \in \{0, n\}$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Exemple 9: On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Le nombre X de "pile" obtenus suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$.

Définition 10: Soit $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. On note $X \sim \mathcal{G}(p)$

Exemple 11: On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtention du premier "pile". Le nombre de lancers effectués suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

Définition 12: Soit $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$. On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Exemple 13: modélise par exemple le nombre de clients entrant dans un magasin pendant une période de temps

[G] 342

3) Indépendance

Définition 14: Deux variables aléatoires discrètes X et Y de Ω sont dites indépendantes si pour toute parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ on a:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

Définition 15: Etant donnée une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires discrètes de Ω . On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $J \subset I$ et toute partie $(A_j)_{j \in J}$ avec $A_j \subset X_j(\Omega) \forall j \in J$, on a: $P(\bigcap_{j \in J} X_j \in A_j) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$

Proposition 16: X et Y sont indépendantes ssi $\forall (a, b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P(X=a, Y=b) = P(X=a) P(Y=b)$

II - Outils pour l'étude des variables aléatoires discrètes

1) Espérance et Moment

Soit X et Y des v.a. discrètes réelles sur Ω

Définition 17: On dit que X admet une espérance si la somme $\sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$ est finie. On note $E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

Proposition 18: 1) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

2) $E[\lambda X] = \lambda E[X] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) Si $X \geq 0 \quad E[X] \geq 0$

4) Si $X \leq Y \quad E[X] \leq E[Y]$

5) $E[X] \leq E[Y]$

Proposition 19: Si X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance: $E[XY] = E[X] \times E[Y]$

Théorème 20 (Transfert) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Alors $f(X)$ admet une espérance finie ssi $\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)| P(X=x) < +\infty$ et alors $E[f(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$

Définition 21: Soit $p \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre p lorsque $E[X^p]$ existe.

On a $E[X^p] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X=x)$

Définition 22: Si X admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de X , noté $V(X)$, la quantité $V(X) = E[(X - E[X])^2]$

Et on appelle l'écart-type de X , la valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Proposition 23: Soit $E[X^2] < +\infty$. Alors:

$$1) V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$2) \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Proposition 24: Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, alors

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Proposition 25: (Inégalité de Markov) Soit X admettant une espérance. Alors $\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

Proposition 26: (Inégalité de Bienaymé-Tchébycheff) Soit X admettant un moment d'ordre 2. On a $\forall a > 0 \quad P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$

Théorème 27: (Inégalité de Hoeffding)

Soit $(X_n)_n$ v.a réelles indépendantes centrées, bornées

p.s : $\forall n \in \mathbb{N} \exists c_n > 0 \quad |X_n| \leq c_n$

Soit $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0 \quad P(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$

2) Fonction génératrice

Définition 28: Soit X une v.a à valeur dans $\mathbb{N}$. La

fonction génératrice de X est $z \mapsto G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k$

Théorème 29: Si X et Y sont indépendantes, on a

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

Théorème 30: G_X est de classe C^∞ sur $(0, 1[$ et

$$G_X^{(n)}(s) = E[X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n}]$$

$$\text{Ainsi } P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

III - Convergence en loi

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a réelle.

Définition 31: On dit que (X_n) converge en loi vers X

si pour toute fonction continue bornée $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

on a $E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$. On note $X_n \xrightarrow{d} X$

Proposition 32: Soit $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $X_n \xrightarrow{d} X$

alors $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

[GK] 236

L37

[GK] 295

296

Lemme 33 (Schoffe) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $f, g_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ applications positives, intégrables par rapport à μ telles que

1) $g_n \rightarrow f$ p.p. Alors $g_n \xrightarrow{L^1} f$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$

Corollaire 34: Soient v et $(v_n)_n$ deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ admettant les densités f et f_n par rapport à μ . On suppose $f_n \rightarrow f$ p.p. Alors v_n converge faiblement vers v .

Corollaire 35: Soient X et $(X_n)_n$ des v.a discrètes à valeurs dans un ensemble dénombrable D .

On suppose $\forall k \in D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

Alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$

Application 36: Soit pour $n \geq 1$, une v.a $X_n \sim B(n, p_n)$

On suppose $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$

Alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$ où $X \sim P(\lambda)$

DEV2

Théorème 37 (Central limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a réelles iid admettant un moment d'ordre 2 on note σ^2 la variance commune à ces variables

Alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$

Annexe : lois usuelles, espérance, variance, etc. page Kurt 236

→ modéliser phénomènes

de comptage : nb succès,
nb d'événements, temps d'attente...
ex avec une pièce ou un dé

Objectif : comprendre
les v.a. discrètes
et comment les
manipuler

v.a. discrète = loi discrète
 Ω = ensemble discret
 $\{1, 2, \dots\}$

$$P_X = \sum_{x \in \Omega} p_x \delta_x$$

TCL

CV en loi

comprendre leur
comportement limite
Th. restant vrais dans IN

CV loi Binom
vers
Poisson
DEV2

Outils

on cherche
à contrôler les
écarts à la
moyenne

inégalités
Hoeffding

contrôle exponentiel
DEV1

Fct génératrice

Outil analytique $G_X(z) = E[e^{zx}]$

→ utile pour la convergence
et l'indépendance
→ permet d'identifier les lois

264: Variables aléatoires discrètes exemples et applications

Pour mieux connaître les lois

Esperance et moments
comportement moyen
et la dispersion (variance)

indépendance

→ méthode + compare
via des sommes de v.a.

Lois usuelles

→ Bernoulli : pièce

→ Binomiale $B(n, p)$ répétition
de la pièce

→ Géométrique $G(p)$: temps
d'attente

→ loi de Poisson

→ généralise la loi binomiale
on compte le nb d'événements
indépendants sur un intervalle
(ex: client rentrant dans un
magasin)

= loi événements rares
 $P(\lambda)$