

[GK]
[B]
[HAU]

262: Convergence d'une suite de v.a. Théorèmes limite. Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $(X_n)_n$ suite de v.a. et X v.a.

I- Les différents modes de convergence

1) CV p.s [GK] 265 [B] 93

- def
- stabilité
- Borel cantelli
- Inégalité de Hoeffding

DEV1

2) convergence en proba [GK] 268 [B] 114 274-275

- def
- stabilité
- CV p.s $\Rightarrow$ CV IP
- CE ($\Leftarrow$)
- CV p.s d'une ss suite
- stabilité fct C^0

3) CV L^p [B] 117 120 [GK] 268 [HAU] 365

- def
- $L^p \subset L^p$
- CE $L^1 \not\subset L^2$
- CV $L^p \Rightarrow$ CV IP
- CE ($\Leftarrow$)

4) CV en loi [GK] 295-296 303-305

- def
- stabilité fct C^0

DEV1

- Schafte
- X_n cv faiblement vers b
- $IP(X_n=k) \rightarrow IP(X=k)$
- cv loi Binomiale vers Poisson
- $X_n \xrightarrow{L} X$ ssi $F_{X_n} \rightarrow F_X$
- cv IP $\Rightarrow$ cv loi
- $\Leftarrow$ pour cat
- Slutsky

II - Théorèmes limites

- 1) loi des grands nombres [GK] 269
275
277
- loi faible
 - loi forte
 - Corollaire avec événements

2) TCL 307

- Th de Lyap
- TCL

Z62: Convergences d'une suite de variables aléatoires.
Théorèmes limite. Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires. Soit X une variable aléatoire.

I- Les différents modes de convergence

1) Convergence presque-sûre

Définition 1: On dit que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si $P(\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$.
on note alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

Proposition 2: Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$. Alors:

1) $\forall a \in \mathbb{R} \ a X_n \xrightarrow{p.s.} a X$

2) $X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y$

3) Si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, $g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$

Lemme 3: (Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements

1) Si $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < +\infty$ alors $P(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$

2) Si les $(A_n)_n$ sont indépendants et $\sum_{n \geq 0} P(A_n) = +\infty$ alors $P(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 1$

Théorème 4: (Inégalité de Hoeffding)

Soit $(X_n)_n$ v.a. indépendantes centrées, bornées: $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists c_n > 0 \ |X_n| \leq c_n$.

Soit $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$

Alors $\forall \varepsilon > 0 \ P(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$

[GK]
Z65

[172]
173

Application 5: Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que $2\alpha - \beta > 0$. On se place dans le contexte du théorème 4 et de plus on suppose $\sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha - \beta}$

Alors $\forall \varepsilon > 0 \ \sum_{n \geq 1} P(|S_n| > n^\alpha \varepsilon) < +\infty$
et $n^{-\alpha} S_n \xrightarrow{p.s.} 0$

2) Convergence en probabilités

Définition 6: On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si $\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
on écrit alors $X_n \xrightarrow{P} X$

Proposition 7: Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors

1) $(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} (X, Y)$ 2) $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

Théorème 8: La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Contre exemple 9: Soit $X_n \sim \text{Ber}(\frac{1}{n})$. Alors $X_n \xrightarrow{P} 0$ mais $(X_n)_n$ ne converge pas presque sûrement vers 0

Théorème 10: Soit $(X_n)_n \xrightarrow{P} X$. Alors il existe une sous-suite $(X_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow{P} X$

Corollaire 11: Si $(X_n)_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ telle que $X_n \xrightarrow{P} X$ et si $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

3) Convergence L^p

Définition 12: Si $X, X_n \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $1 \leq p < +\infty$. On dit que X_n converge vers X dans L^p si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|X_n - X\|_p = 0$

[GK]
Z68

[B]
114

[GK]
Z74

Z75

[B]
117

On note $X_n \xrightarrow{L^p} X$

120

Proposition 13: Soit $1 \leq p < q$. Si $X_n \xrightarrow{L^q} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

[HAU]

Contre-exemple 14: Soit $X_n = \sqrt{n} 1_{[0, \frac{1}{n}]}$. Alors

365

$X_n \xrightarrow{L^2} 0$ mais ne converge pas dans L^1 .

[GK]

Théorème 15: La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.

[HAU]

Contre-exemple 16: $X_n = n 1_{[0, \frac{1}{n}]}$ $\xrightarrow{L^1} 0$ donc

365

$X_n \xrightarrow{L^1} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{L^2} 0$

4) Convergence en loi

[GK]

Définition 17: On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$. On note $X_n \xrightarrow{L} X$.

295

296

Théorème 18: Soit $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $X_n \xrightarrow{L} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{L} g(X)$.

Lemme 19 (Schafge): Soit $(\mathcal{L}, \mu)$ un espace mesuré, $f, (f_n)_{n \geq 1}: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^+$ applications positives intégrables par rapport à μ telles que

1) $f_n \rightarrow f$ pp

2) $\lim_n \int_{\mathcal{L}} f_n d\mu = \int_{\mathcal{L}} f d\mu$

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$

Corollaire 20: Soit ν et $(\nu_n)_n$ des mesures de probabilité sur $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mu)$ admettant les densités f et f_n par rapport à μ . On suppose $f_n \rightarrow f$ pp. Alors ν_n converge faiblement vers ν .

Corollaire 21: Soient X et $(X_n)_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble dénombrable E . On suppose $\forall k \in E \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

Alors $X_n \xrightarrow{L} X$

Application 22: Soit pour $n \geq 1$, une variable aléatoire X_n suivant la loi Binomiale $B(n, p_n)$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$.

Alors $X_n \xrightarrow{L} X$ où $X \sim P(\lambda)$

DEV2

Théorème 23: Soient $(X_n)_n$ et X deux variables réelles avec F_n et F_X leur fonction de répartition. Alors:

$X_n \xrightarrow{L} X \iff$ Pour tout point de continuité de F_X $F_n(x) \rightarrow F_X(x)$

Théorème 24: La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

Proposition 25: Si X_n converge en loi vers une constante a , alors X_n converge en probabilité vers a .

Lemme 26 (Slutsky): Soit $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ des VA réelles telles que $X_n \xrightarrow{L} X$ et $Y_n \xrightarrow{L} c$. Alors $X_n + Y_n \xrightarrow{L} X + c$.

II - Théorèmes limites

1) Loi des grands nombres

1) Loi des grands nombres

Théorème 27: (Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. réelles iid admettant un moment

269 d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

Alors $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{L^2} E[X_1]$

275 Théorème 28: Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a réelles iid
Si $E[X_1] < +\infty$ alors $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{P} E[X_1]$

277 Corollaire 29: Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants de même probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour $\omega \in \Omega$, on note $N_n(\omega)$ le nombre d'événements qui sont réalisés parmi $A_1, \dots, A_n$. Ainsi on a:

$$N_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{et} \quad E N_n = \frac{1}{n} N_n$$

Alors $P(F_n \rightarrow p) = 1$

2) Théorème central limite

307 Théorème 30 (de Moivre) On a l'équivalence

$$X_n \xrightarrow{L} X \iff \Phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

Théorème 31: (Central limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a réelles iid admettant un moment d'ordre 2. On note σ^2 la variance commune à ces variables et m l'espérance

Alors
$$\frac{(X_1 + \dots + X_n) - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$$

Annexe
Lien entre les différents modes de convergence

$$L^q \implies L^p \implies L^1$$

$$q \geq p \geq 1$$

$$P.S. \implies P \implies \text{doit} \implies \text{limite constante}$$

← sous-suite

But: Étudier les #
modes de cv en
proba et leurs liens
entre eux

Intégrité Hoeffding DEV1

En proba discrète
CV loi Binomiale vers loi Poisson
DEV2

Th limite pour une
somme de v.a iid

TCL
LGN

262: Convergence d'une suite de
v.a. Théorèmes limites. Ex et app

lié à la
norme L^p
donc à l'espérance
intégrabilité

critère de Cauchy

ps

Borel Carvelli

stable get C^0
somme produit

$\uparrow$ uniforme
intégrabilité

IP $\Rightarrow$ loi

limite
Cst

$\Leftarrow$ ss suite

+ faible
stable get C^0

lien avec les fonctions en proba
équivalence pour savoir si 2 v.a
ont la m loi

$\rightarrow$ fct répartition
 $\rightarrow$ fct caractéristique

Remplir ou pas et à
rechercher