

[GK]

[B] [Ouv]

261 Loi d'une variable aléatoire: caractérisations, exemples, applications

($\Omega, \mathcal{F}, P$)

I- Loi d'une variable aléatoire [GK] [B]

1) Généralité [GK] 117 126 128 189 172 185 [B] 53

- def v.a., loi (ex pièce)

- indépendance

- Th de Transfert

- espérance et variance

2) V.a discrètes [GK] 131

- def exemples

3) V.a à densité [GK] 134

- def et exemples

II- Caractérisation par des fonctions

1) Fonction de répartition [Ouv] 9 [GK] 119

- def

- Th $F_X = F_Y \iff X, Y \hat{=} \text{Poi}$

- Prop sur les fct de répartition

- exemple

2) Fonction génératrice [GK] 235 - 237

- def

- prop $G_{X+Y} = G_X G_Y$ si indep

- exemples

- prop

3) Fonction caractéristique [GK] 239 243 - 244

- def

- prop
- $\phi_\mu(t) = \phi_\nu(t) \Leftrightarrow \mu = \nu$
- $\phi_{x+y} = \phi_x \phi_y$ si indep
- exemples
- prop ϕ

III - Convergence en loi [GK] 295 - 297 [ouv] 304 314

- DEV 1
- def cv en loi
 - stabilité par fct continues
 - Slutsky
 - Schroffe
 - cv faible
 - cv en loi v.a discrètes
 - Application cv Binomiales vers poissons

- DEV 2
- cv avec fonction de répartition
 - Th de Levy
 - TCL
 - app de Moivre Laplace

Annexe: ensemble des loi de leur esperance, variance, fct G et ϕ

261: loi d'une variable aléatoire: caractérisation, exemples, applications

On se place dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
 I- Loi d'une variable aléatoire

1) Généralités

Définition 1: On appelle variable aléatoire toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Définition 2: On appelle loi d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la mesure image de P par X . Cette loi est notée P_X .

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

Exemple 3: Modélisation du lancer d'une pièce par une variable aléatoire X : $P_X = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$.

Définition 4: On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent sont indépendantes

ie $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(X \in A)P(Y \in B)$

Théorème 5: Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow P_{X,Y} = P_X \otimes P_Y$

Définition 6: Soit X une v.a.r. intégrable sur Ω . On appelle espérance de X et on note $E[X]$ le réel défini par $E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$

Définition 7: On appelle variance d'une v.a. X réel positif $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$.

Théorème 8 (de transfert) Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ possédant une densité f et $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction borélienne. La variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance si $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)f(t)dt$ est absolument convergente. on a $E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)f(t)dt$

2) Variables aléatoires discrètes

Définition 9: On dit qu'une loi μ est discrète s'il existe un ensemble D fini tel que $\mu(D) = 1$

On dit qu'une v.a. X est discrète si P_X est discrète.

Exemples 10: $\bullet$ Si $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$ loi discrète

$\bullet$ loi de Bernoulli de loi $(1-p)\delta_0 + p\delta_1$

$\bullet$ loi Binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

3) Variables à densité

Définition 11: On dit qu'une loi μ est à densité s'il existe une fonction mesurable f telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mu(A) = \int_A f dx$$

Exemple 12: loi Gaussienne: $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

II- Caractérisation par des fonctions

1) Fonctions de répartition

Définition 13 Soit X une v.a. à valeur dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de X notée F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(t) = P(X \leq t)$

172

Exemple 14: Soit $X \sim E(\lambda)$ $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}^+}(t)$

Théorème 15: Soient X et Y deux v.a.
 X et Y ont la même loi si $F_X = F_Y$.

Propriétés 16: La fonction de répartition F_X d'un v.a.

- Vérifie:
- F_X est à valeurs dans $[0, 1]$
 - F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
 - $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$
 - $\forall n \in \mathbb{R}$ F_X est continue à droite.

2) Fonction génératrice

Définition 17: On appelle fonction génératrice d'une v.a X à valeur dans $\mathbb{N}$ la fonction:
 $z \mapsto G_X(z) := E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k$

Théorème 18: Si deux v.a X et Y sont indépendantes on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Théorème 19: Soit X v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. Sur $[0, 1]$ la fonction $z \mapsto G_X(z)$ est infiniment dérivable et $G_X^{(n)}(s) = E[X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n}]$ en particulier $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Exemple 20: $X \sim B(p)$ $G_X(s) = (1-p) + ps$

$$X \sim B(n, p) \quad G_X(s) = (1-p) + ps^n$$

$$X \sim P(\lambda) \quad G_X(s) = e^{-\lambda(1-s)}$$

3) Fonction caractéristique

Définition 21: On appelle fonction caractéristique d'une v.a X qu'on note ϕ_X : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_X(t) = E[e^{itX}]$

Remarque 22: La fonction caractéristique ne dépend que la loi de X .

Théorème 23: Soient X et Y de v.a indépendantes à valeur dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$$

Théorème 24: Si X est une v.a réelle admettant un moment d'ordre n , alors la fonction caractéristique de X est de classe C^n et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, n; \quad \phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$

Exemple 25: $X \sim N(m, \sigma^2)$ $\phi_X(t) = \exp(i m t - \frac{\sigma^2 t^2}{2})$

III - Convergence en loi

Définition 26: On dit qu'une suite de v.a (X_n) converge en loi vers la v.a X si la suite de mesures (P_{X_n}) converge faiblement vers P_X .

Théorème 27: Soit g une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$. Si (X_n) converge en loi vers X alors $(g(X_n))_n$ converge en loi vers $g(X)$

Exemple 28: Soit $n \geq 1$, $X_n \sim U([1, n-1])$ alors

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X \sim U([0, 1])$$

DEV 1

($\Omega, \mathcal{F}, \mu$) espace mesuré

lemme de Scheffé 29: Soient $f, f_n, h_n, i, \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ applications positives intégrables par rapport à μ telles que $a) f_n \rightarrow f$ p.p.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu(n) = \int_{\Omega} f d\mu(n)$$

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$

Corollaire 30: Soit ($\Omega, \mathcal{F}, \mu$) espace mesuré. Soient ν et $(\nu_n)_{n \geq 1}$ des mesures de probabilités sur ($\Omega, \mathcal{F}, \mu$) admettant des densités f et f_n par rapport à μ . On suppose $f_n \rightarrow f$ p.p. Alors ν_n converge faiblement vers ν

Corollaire 31: Soient X et $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a. discrètes à valeurs dans un ensemble dénombrable D . On suppose $\forall k \in D \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

$$\text{Alors } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$$

Application 32 convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

Soit pour $n \geq 1$ $X_n \sim B(n, p_n)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$

$$\text{Alors } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \sim P(\lambda)$$

Théorème 33: (Levy)

Soit (X_n) et X v.a. on a

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \iff \phi_{X_n}(t) \rightarrow \phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Théorème 34: (TCL)

DEV 2

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. réelles i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - E[X_1] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \sim N(0, \text{Var}(X_1))$$

[G12]
p37

[G11]
p304

Qu'est-ce que c'est?

exemple pièce

Caractérisation avec la convergence en loi
 ex: $X_n \sim B(n, p_n) \rightarrow X \sim P(\lambda)$ la loi d'une v.a. plutôt que la v.a. elle-même
 Plus intéressant d'étudier
 DEV 1

Th utile
 Th de transfert pour le calcul de loi

Lien avec l'espérance et la variance

261: Loi d'une v.a.
 caractérisation exemple et application

TCL: loi d'une suite de v.a. iid
 DEV 2

2 types de v.a.

- discrète
- à densité

Comment les caractériser?

Par des fonctions:

- répartition $F_X(t) = P(X \leq t)$
 L' même loi si $F_X = F_Y$

- génératrice $\rightarrow$ loi discrète
 $G_X(z) = E[z^X]$
 $G_{X+Y} = G_X G_Y$ si indep

- fonction caractéristique
 $\phi_X(t) = E[e^{itX}]$
 $\phi_X = \phi_Y \Leftrightarrow \hat{m} = \hat{b}_i$
 $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ si indep