

[HAS] [RA]

[R] [OA]

[G]

253- Utilisation de la notion de convexité en analyse

I- Ensemble convexe

1) Principaux résultats [HAS] 313-314

- def segment, convexe, étoilé
- Dans EVN A convexe $\Rightarrow A$ étoilé $\Rightarrow A$ convexe par arcs
- ex
- prop λA $A+B$ $\bigcap A_i \dots$

2) Sur un espace de Hilbert [HAS] 489-490

DEV1

- projection sur un convexe
- $P_C \perp$ lipschitz
- application sur F fermé

II- Fonctions convexes et inégalités de convexité

1) Principaux résultats [R] 343-346 [RA] 225 237

I intervalle de $\mathbb{R}$ $I \neq \emptyset$ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

- def convexe strict convexe, concave
- def épigraphe
- f convexe si épigraphe convexe
- convexe $\Rightarrow C^0$ sur I
- 3 pentes
- inégalités avec dérivées
- f convexe si $f''(x) \geq 0$
- ex f
- f par bg convexité
- ex: exp convexe $\ln$ concave

DEV2

2) Inégalités de convexité [RA] 241 [GK] 169 211 [G] 97

- Jensen avec somme et intégrales
- App en proba

- Inégalité arithmético-géométrique
- Lemme Young
- Holder
- Minkowski
- $L^p \subset L^q$

III - optimisation et convexité [R] 347

- convexe $\Rightarrow$ min global
- Th avec coercive
- App du th.

253: Utilisation de la notion de convexité en analyse.

I-Ensembles convexes

1) Principaux résultats

Définition 1: Soit E un K -ev et A un sous ensemble de E .

1) Soient $x, y \in E$. On appelle segment de E d'extrémités x et y l'ensemble $[x, y] = \{(1-t)x + ty; t \in [0, 1]\}$

2) On dit que A est convexe si $\forall x, y \in A, [x, y] \subset A$.

3) On dit que A est étoilé si $\exists a \in A$ tel que $\forall x \in A, [a, x] \subset A$.

Remarque 2: Dans un espace normé on a: A convexe $\Rightarrow A$ étoilé $\Rightarrow A$ convexe par arcs.

Exemple 3: Soit F un sev de E , alors $\forall a \in E, a + F$ est un sous ensemble convexe de E .

2) Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

Proposition 4: Soient A, B deux sous-ensembles convexes de E

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall$ suite finie $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de E et $t_1, \dots, t_n \geq 0$ tq $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ on a $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $n.A = A + \dots + A$ n fois

3) Si $0 \in A$ alors $tA \subset A \quad \forall t \in [0, 1]$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, λA et $A + B$ sont des ensembles convexes

5) Une intersection de sous-ensembles convexes est convexe

Proposition 5: Soit $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n, $\forall a \in E, \forall r > 0$

$B(a, r)$ et $B[a, r]$ sont convexes.

2) Sur un espace de Hilbert

Théorème 6: (Projection sur un convexe fermé) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

1.1) un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C$ tel que

$$\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$$

De plus y est caractérisé par: $\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$
 y est appelé la projection de x sur C , notée $P_C(x)$.

Corollaire 7: La projection $P_C: x \in H \mapsto P_C(x) \in C$ est 1-lipschitz.

Application 8: Soit F un fermé de H .

1) $\forall x \in H, \exists ! y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$. On le note $P_F(x)$ et il vérifie $x - P_F(x) \in F^\perp$

2) On a $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est linéaire, continue de norme 1

3) $(F^\perp)^\perp = F$

II-Fonctions convexes et inégalités de convexité

1) Principaux résultats

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Définition 9: On dit que: f est convexe si $\forall (x, y) \in I$

$$\forall t \in [0, 1] \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

f est strictement convexe si l'inégalité est stricte $\forall x \neq y$

f est concave si $-f$ est convexe.

Définition 10: L'épigraph de f est $ep(f) = \{(x, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid r \geq f(x)\}$

Proposition 11: f est convexessi son épigraph est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$

[HAS] 483

430

[R] 343

225 [R]

[R] 344 Théorème 12: Si f est convexe sur I , f est continue sur I .

Théorème 13: On a équivalence entre

- 1) f est convexe
- 2) $\forall x < y < z \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

3) $\forall a \in I \quad T_a: x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

[R] 237 Théorème 14: Soit I ouvert convexe de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors on a les équivalences:

- 1) f est convexe sur I
- 2) $\forall x, y \in I \quad (f'(x) - f'(y))(x - y) \geq 0$
- 3) $\forall x, y \in I \quad f(x) - f(y) \geq f'(y)(x - y)$

Corollaire 15: Si f est deux fois dérivable sur I , f est convexe sur I si $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Exemple 16: La fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convexe

Théorème 17: Soit F l'ensemble des applications $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant:

- 1) $f(1) = 1$
 - 2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x+1) = x f(x)$
 - 3) $f_n(f)$ est convexe.
- Alors $F = \{ \Gamma \}$

Exemple 18: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
 $f_n: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Inégalités de convexité

Théorème 19: (Inégalité de Jensen)

Soit f fonction convexe sur I convexe de $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Alors $\forall p \geq 1 \quad \forall x_1, \dots, x_p \in I, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in [0, 1]$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ on a $f(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$

Théorème 20: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction convexe alors, pour toute fonction u continue sur $[a, b]$ $a < b$, on a $f(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u(t)) dt$

Application 21: Si X est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que $f(x)$ admet une espérance. Alors on a: $f(E[X]) \leq E[f(X)]$

Théorème 22: (Inégalité arithmético-géométrique)
 Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels positifs on a $\ln \dots x_1^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Lemme 23: (Young) Si $1 < p, q < +\infty$ et p, q sont conjugués alors $\forall a, b \geq 0 \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Théorème 24: (Inégalité de Holder)

Soit $p, q \in]1, +\infty[$ conjugués. Soient $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$ dans $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré. Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Théorème 25 (Minkowski) Soit $p \in [1, +\infty[$, $f, g \in L^p$. Alors $f+g \in L^p$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Conséquence 26: Si $\mu(x) < +\infty$ $\forall x \in I$ et $f \in \mathcal{L}^1_\mu(I)$

III - Optimisation et convexité

Théorème 27: Si f est convexe sur I et dérivable en $x \in I$ et que $f'(x) = 0$, alors f admet un minimum global en x .

Théorème 28: Si f est convexe sur I et admet un minimum local en $x \in I$, alors ce minimum est global.

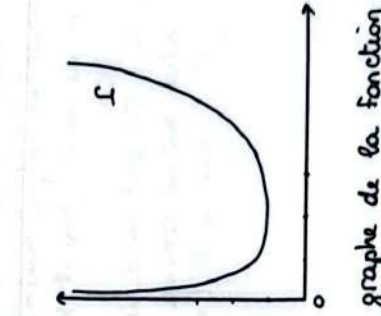
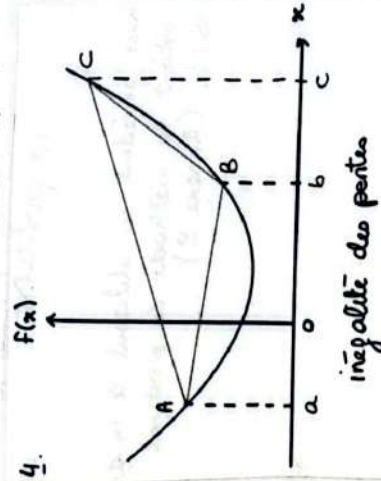
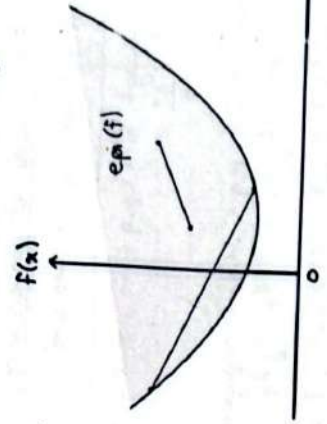
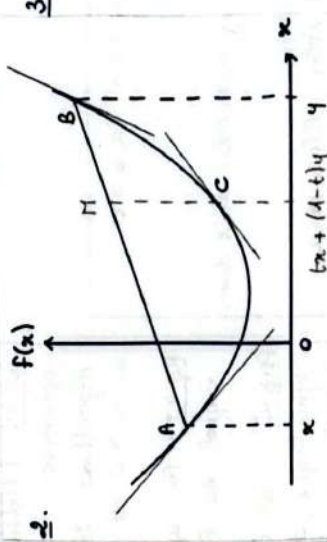
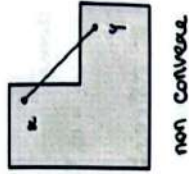
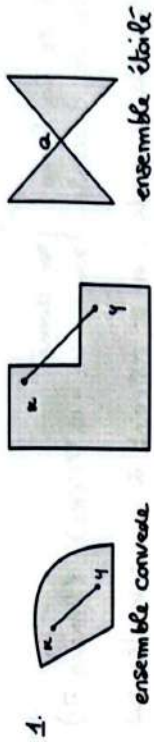
Proposition 29: Soit E un ev de dimension finie et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si C est un fermé non vide de E et que f est coercive, alors f est minime sur C et atteint son minimum.

Lemme 30: Si de plus C est convexe et $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe sur C , alors il existe un unique $\tilde{x} \in C$ minimisant f sur C .

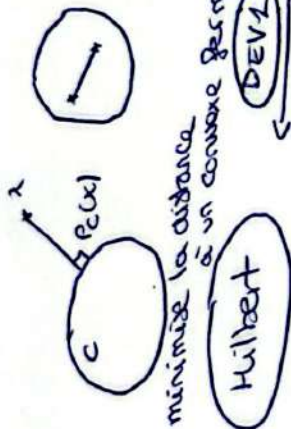
Proposition 31: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , $b \in E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, défini positif. Alors $f: x \in E \mapsto \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle + \langle b, x \rangle \in \mathbb{R}$ admet un unique minimum sur E .

Exemple 32: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $f: x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est (strictement) convexe ssi A est (définie) positive.

ANNEXE



→ utile pour minimiser le coût de production dans une entreprise pour la fabrication de produit



Ensemble convexe

253: Utilisation de la notion de convexité en analyse

Sens utile en proba

Inégalité de convexité

arithmétique géométrique

fonct convexe:

pt critique = min global

Optimization

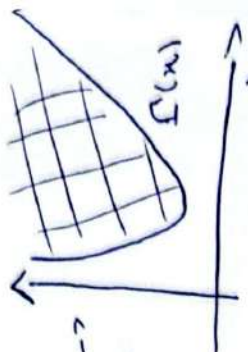
Holder Minkowski = base de L^p

utile pour L^p

Fonctions convexes

épigraphe (convexe)

$\Leftrightarrow$



par log convexe DEV2



graphe de la courbe représentative de la fonct convexe vérifie l'inégalité des 3 cordes

Strict convexe + coercive $\Rightarrow \exists!$ minimum