

[ELA2]

[GK]

250 Transformation de Fourier. Application

I- Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

1) Def et premières prop [ELA2] 109-122

- def
- Riemann-Lebesgue
- $\hat{f} \in C^0$ bornée
- $\hat{f}$ lin C^0
- ex
- Application: TF de la Gaussienne
- $\hat{f} = \hat{f}$ (self)
- Prop
- f paire / impaire $\Rightarrow \hat{f}$ paire / impaire
- dérivée

DEV1

2) Convolution 75 78 114-115

- def
- Th
- $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$
- $f * f = f \Rightarrow f = 0$
- Formule dualité
- injectivité TF

DEV2

3) Formule d'inversion 116 118

- Th
- $\hat{\hat{f}} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$

II- Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

- Th
- ex
- densité L^2

- def
- $f \in L^1 \cap L^2 \quad \hat{f} = \hat{f}$
- Formule d'inversion
- Formule dualité

III - Applications

1) Formule sommatoire de Poisson 213

• Th

2) En probabilité

- def fct caractéristique
- Prop
- caractéristique b.i
- $\phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$

250: Transformation de Fourier. Applications.

I-Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1) Définition et premières propriétés

109 Définition 1: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, la fonction:

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Lemme 2: (Riemann-Lebesgue) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

110 Théorème 3: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$. On appelle la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

111 Corollaire 4: La transformation de Fourier est une application linéaire continue.

Exemples 5: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$

$$\mathcal{F}(\chi_{[a,b]})(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\xi} \sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right) e^{-i(a+b)\frac{\xi}{2}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Application 6 (Transformée de Fourier de la Gaussienne)

Soit $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$

Alors $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

DEV 1

Notation 7: f_{ξ} est la fonction $f_{\xi}(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$

• $T_a f$ est la fonction $T_a f(x) = f(x-a) \forall x \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$

Proposition 8: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathcal{F}(f_{\xi}) = \overline{\mathcal{F}(f)}_{\xi} \quad \mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)_{\xi}} \quad \mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$$

Corollaire 9: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. on a:

f paire (resp impaire) alors $\hat{f}$ paire (resp impaire)

Proposition 10: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\text{• Pour } \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ fixé, } \mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

$$\text{• Pour } a \in \mathbb{R} \text{ fixé } \mathcal{F}(T_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$$

Proposition 11: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$. Si $f' \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\text{alors } \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

Proposition 12: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f}$ admet une dérivée $\hat{f}'$ continue et bornée telle que:

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)'(\xi) = -i\mathcal{F}(xf)(\xi)$$

2) Convolution

Définition 13: On dit que deux fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit le produit de convolution de f et g : $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$

Théorème 14: Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R})$.

Pour presque tout x , $t \mapsto f(x-t)g(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Proposition 15: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$f * g = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Remarque 16: Cela montre qu'il n'y a pas d'élément neutre pour le produit de convolution

Exemple 17: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $f * f = f$ alors $f \equiv 0$

Théorème 18: (Formule de dualité) Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) g(v) dv$

Théorème 19: La transformation de Fourier $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est une application injective.

3) Formule d'inversion

Théorème 20: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt$

Proposition 21: Si $\hat{f}, \hat{g}$ et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{\hat{f} \hat{g}} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$

II - Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 22: (Formule de Plancherel)
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$

Remarque 23: En terme de produit scalaire, cette formule s'écrit: $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \overline{\hat{g}(t)} dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$

Exemple 24: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi$

Théorème 25: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors:

1) Il existe une suite (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$

2) Pour une telle suite (f_n) , la suite $(\hat{f}_n)$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\hat{f}$ indépendante de la suite choisie

Définition 26: La limite $\hat{f}$ est appelée la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$

Proposition 27: Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} = \hat{f}$

Théorème 28: Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt$

Théorème 29: Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(v) \overline{g(v)} dv$

III - Applications

1) Formule sommatoire de Poisson

213 Théorème 30: Soit $g \in C^2(\mathbb{R})$ telle que
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |g(x)| < +\infty \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |g'(x)| < +\infty$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{inx}$$

2) En probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire réelle.

[GK] 238 Définition 31: On appelle la fonction caractéristique de X , notée ϕ_X , la fonction:

$$\begin{aligned} \phi_X: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \mathbb{E}[e^{itX}] \end{aligned}$$

Remarque 32: La fonction caractéristique ne dépend que de la loi de X , notée P_X . Il s'agit de la transformée de Fourier de P_X .

241 Propriété 33: $\phi_X(0) = 1$

- $|\phi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- ϕ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Théorème 34: La fonction caractéristique caractérise la loi $P_X = P_Y$ ssi $\phi_X = \phi_Y$

239

Théorème 35: Si X admet un moment d'ordre N alors la fonction caractéristique de X est de classe C^N et $\forall k \in [1, N]$

245

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$$

→ Pour quelles f on a $\hat{f}$?

→ peut on construire f avec $\hat{f}$?

$L^2(\mathbb{R})$
on a une TF
→ linéaire continue
 $F: f \mapsto \hat{f}$

DEV1

$$F(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Formule d'inversion
si $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

L^1 restrictif car
écarte un grand nb
de f

$L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$
donc formules ne
marchent plus

mais L^2 à
des props
géométriques
intéressantes
 $L^2 \cap L^1$

densité
 $L^2(\mathbb{R})$

$$F: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

formule d'inversion

Transformation de Fourier Applications

→ introduit par Fourier pour les
edp de l'équation de la chaleur

Application

Formule
intégrale poisson

en proba
avec la f et
caractéristique = TF de f

lien avec la convolution

$$\hat{f * g} = \hat{f} \hat{g} \quad f, g \in L^2$$

F est injective
pas surjective
DEV2