

246: Séries de Fourier. Exemples et applications

I - Généralités sur les séries de Fourier

1) Classe de fct 2π périodique [ELA2] 170-171

- def
- def $C_{2\pi}$ et $L^p_{2\pi}$
- $C_{2\pi} \subset L^{\infty}_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$
- $C_{2\pi}$ dense dans $L^p_{2\pi}$
- $L^2_{2\pi}$ complet $L^2_{2\pi}$ Hilbert

2) Polynômes et séries trigonométriques [ELA2] 172

- e^{inx} [G] 267
- def poly trigo
- (e^{inx}) base hilbertienne
- def série trigo
- C_N -268

3) Coefficients et série de Fourier [ELA2] 173-176

- def c_n
- produit de convolution
- prop c_n
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{iNx} dx = 0$
- def a_n et b_n
- prop
- ex
- def série de Fourier

II - Modes de convergence des séries de Fourier

1) Convergence au sens de Césaro [ELA2] 181-184

- def σ_N 190-192
- def cv

- noyau Dirichlet D_N
- Prop D_N
- noyau de Fejer
- Th de Fejer
- polynôme trigonométrique dans $(C_{\pi}, \|\cdot\|_{\infty})$ et $(C_{\pi}, \|\cdot\|_p)$

2) Convergence en moyenne quadratique [ELA2] 193-194
 • Parseval

3) Convergence ponctuelle et normale [ELA2] 196
 [G] [272]
 • Th Dirichlet
 • Corollaire

III - Applications

1) Calcul de sommes [G] 272

DEV1

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{(2n-1)^2} \quad \sum \frac{1}{n^4}$$

2) Calcul d'intégral

DEV2

• Intégrale de Fejer

3) Formule sommatoire de Poisson [ELA2] 213

• Th

246: Séries de Fourier. Exemples et applications

I- Généralités sur les séries de Fourier

1) Classe des fonctions 2π périodiques

Définition 1: Une application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique

si $\exists T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$

Remarque 2: Si f est T périodique, on peut se ramener à une fonction 2π -périodique:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

Définition 3: On note $C_{2\pi}$ le sev de $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'espace des fonctions continues 2π -périodiques. On le munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

Définition 4: On note $L^p_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π périodiques appartenant à L^p . On le munit de la norme $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Proposition 5: On a $C_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^p_{2\pi}$

Proposition 6: $C_{2\pi}$ est dense dans $(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Proposition 7: $(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$ est complet $\forall p \in [1, +\infty[$

et $L^2_{2\pi}$ muni de $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ est un Hilbert.

2) Polynômes et séries trigonométriques

Définition 8: $\forall n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n , l'élément de $C_{2\pi}$ donné par $e_n(x) = e^{inx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Définition 9: On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire des e_n .

Théorème 10: Le système trigonométrique $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$

Définition 11: On appelle série trigonométrique, une série de fonction de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_n e^{inx} + \bar{c}_n e^{-inx})$

On la note $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

Proposition 12: Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ convergent, alors la série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$. Sa somme définit une fonction dans $C_{2\pi}$.

3) Coefficients et séries de Fourier

Définition 13: Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n ème coefficient de Fourier de f , le nombre complexe aff donné par $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Définition 14: Soit $f, g \in L^1_{2\pi}$. On définit le produit de convolution: $f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) g(t) dt$ lorsqu'il existe.

Proposition 15: Soit $f \in L^1_{2\pi}$, $g \in L^1_{2\pi}$, alors

1) $c_n(fg) = c_n f \cdot c_n g$ ou $c_n(x) = f(x) \cdot g(x) \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

2) $c_n(fg) = c_n f \cdot c_n g$

3) $f * g = c_n(f) \cdot c_n(g)$ en

alors $c_n(fg) = c_n f \cdot c_n g$

Proposition 16: Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}$ alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{iNx} dx = 0$$

Définition 17: Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}$. On définit les coefficients de Fourier réels:

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

On a alors $c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))$

Proposition 18: - Si f paire $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ et $b_n(f) = 0$
- Si f impaire, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Exemple 19: Pour $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \in L^1_{\mathbb{R}}$ on a

$$a_n(f) = \frac{4(-1)^{n-2}}{n^2 \pi^2} \quad \text{et} \quad b_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad a_0(f) = \frac{2}{3}$$

Définition 20: Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$ où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f .

II- Modes de convergence des séries de Fourier

1) Convergence au sens de Césaro

Définition 21: Soit $f \in C_{\mathbb{R}}$. On note $\sigma_N(f)$ la N -ième somme de Césaro de la série de Fourier f :

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)$$

Définition 22: On dit que la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge au sens de Césaro au point $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N(f)(x_0)$ existe

Définition 23: La fonction $D_N := \sum_{n=-N}^N e^{inx}$ est appelée noyau de Dirichlet d'ordre N ($N \in \mathbb{N}$)

Proposition 24: 1) D_N est une fonction paire, 2π périodique et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$.

2) D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

3) $\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}$ on a $S_N(f) = f * D_N$

Définition 25: On appelle noyau de Fejér d'ordre N $K_N := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$.

Théorème 26: (Fejér) 1) Si $f \in C_{\mathbb{R}}$ alors $\|S_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ et $\sigma_N(f)$ CUV vers f

2) $\exists f \in L^1_{\mathbb{R}}$ $p \in [1, +\infty[$, alors $\|S_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f)$ CUV vers f dans L^p .

corollaire 27: Les polynômes trigonométriques sont denses dans $(C_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_{\infty})$ et dans $(L^p_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_p)$

2) Convergence au moyen quadratique

193	<u>Théorème 28: (Parseval)</u> Soit $f \in L^2_{\mathbb{R}}$, alors $\ S_N(f)\ _2$ converge vers f dans L^2. 2) $\ f\ _2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) ^2$	2) Calcul d'intégrale <u>Théorème 34: (Intégrales de Fresnel)</u> $\int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	DEV2
194	<u>Remarque 29: La formule de Parseval s'écrit aussi</u> $\ g\ _2^2 = \frac{1}{4} \ a(g)\ _2^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) ^2 + b_n(g) ^2$ 3) Convergence ponctuelle et normale <u>Théorème 30: (Dirichlet)</u> Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existent et que $g'(x_0^+)$ et $g'(x_0^-)$ existent. Alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{g(x_0^-) + g(x_0^+)}{2}$	3) Formule d'annulation de Poisson <u>Théorème 35:</u> Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 f(x) < +\infty$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 f'(x) < +\infty$ Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$	DEV2 213
[G] 272	<u>Corollaire 31:</u> Si f est 2π périodique et de classe C^1 par morceaux, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ <u>Théorème 32:</u> Si $f \in C_{2\pi}$ et C^1 PM, la série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ <u>III - Applications</u> 1) Calcul de sommes		
[G] 272	<u>Proposition 33:</u> 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$		DEV1

Idée: exprimer f par
périodique f comme somme
trigonométrique en sinus et
cosinus

→ Fct régulières

L'introduit par Fourier
pour résoudre
l'équation de la
Chaleur.

$$\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$\sum a_n e^{inx}$$

246: Série de Fourier.
Exemples et applications

lien avec Th des espaces
de Hilbert

Pour quelles f a-t-on CV de $S_N(f)$?
Y-a-t-il CV ?
Quelle CV ?

Différents mode
de CV

CV_N

Dirichlet
 CV ponctuelle S_N CV vers f ds L^2
+ C^1 et C^0

$\parallel$

CV_N de S_N sur $\mathbb{R}$

Césaire S_N

D_N

Δ $g \in C^1$

Feyer

S_N CV f

Applications

Calcul de
Somme

$DEV 1$

Intégrales
de FRESNEL
 $DEV 2$