

245. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

I- Régularité des fonctions à variables complexes

1) Fonctions analytiques [Tau] 50-53

- def analytique + ex
- série entière analytique sur $D(0, R)$
- prolongement analytique
- zéros isolés

2) Fonctions holomorphes [Tau] 39 59-61

- $\mathbb{C}$ dérivable
- $H(\Omega)$
- Formules de Cauchy Riemann
- $f' \equiv 0$ sur $\Omega \Rightarrow f$ est sur Ω

II- Holomorphie et intégration [Tau] 67-71

1) Intégration le long d'un chemin

- def arc arc fermé chemin
- intégrale sur chemin + ex
- def indice
- Th sur l'indice

2) Théorie de Cauchy et Conséquence [Tau] 72

- Th de Cauchy
- Formule de Cauchy + Th d'holomorphie
- TF de la Gaussienne
- Formule de Taylor
- Inégalité de Cauchy
- Th de Liouville

DEV4

III - Fonctions méromorphes

1) Singularités [Tau] 99

- def singularités isolée / effarable
- def pol et résidu
- def méromorphe

2) Théorème des résidus [Tau] 102-104

- lemme
- Th
- ex

IV - Application aux polynômes orthogonaux [ELA2]

40-41 43

- def poids
- def $L^2(I, p)$
- $L^2(I, p)$ espace de Hilbert
- existence
- ex
- Th

DEV2

245: Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

On considère Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

I- Régularité des fonctions à variables complexes

1) Fonctions analytiques

Définition 1: On dit qu'une fonction définie sur Ω est analytique sur Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω . $\mathcal{H}(\Omega)$ = fonctions analytiques sur Ω

Exemple 2: $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$

Théorème 3: Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme f est analytique sur $\text{Disk}(0, R)$

Théorème 4: (Principe du prolongement analytique)

Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si Ω est connexe, on a les équivalences entre:

- 1) f est identiquement nulle sur Ω
- 2) f identiquement nulle sur un voisinage de a
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$

Théorème 5: (Principe des zéros isolés) Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et Ω connexe ouvert de $\mathbb{C}$, et $f \not\equiv 0$, alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω .

2) Fonctions méromorphes

Définition 6: On dit qu'une fonction f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 \in \Omega$ si la fonction $T: z \in \Omega \setminus \{z_0\} \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$ admet une limite lorsque z tend vers z_0

Dans ce cas, cette limite est notée $f'(z_0)$, la dérivée de f en z_0 .

Définition 7: On dit qu'une fonction f est holomorphe sur Ω lorsque f est $\mathbb{C}$ -dérivable sur Ω . On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Remarque 8: La bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ permet d'identifier $g(z)$ avec $\tilde{g}(x, y)$

Proposition 9: Soit f définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. On a équivalence entre:

- 1) f est dérivable en z_0
 - 2) $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$
- P.r.p: $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$

Corollaire 10: Si $\tilde{f}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ si } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Proposition 11: Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, si Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors $f' \equiv 0$ sur Ω implique f est constante sur Ω

II- Holomorphie et intégration

1) Intégration le long d'un chemin

Définition 12: On appelle arc (fermé) toute application continue γ d'un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. (tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$)

Définition 13: On appelle chemin dans Ω tout arc γ dans Ω de classe C^1 par morceaux

Définition 14: Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin et g une fonction continue sur $\text{Im}(\gamma)$. On appelle intégrale de g sur γ

la quantité:
$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Exemple 15: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$

$\gamma: t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{it} \in \mathbb{C}$ est le cercle de centre z_0 et rayon r .

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it}) i r e^{it} dt$$

Définition 16: On considère $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.

On appelle indice de λ par rapport à γ , le nombre

$$\text{Ind}_{\gamma}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \lambda}$$

Théorème 17: Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.

L'application $\lambda \mapsto I$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}$ et nulle sur la composante connexe de $\mathbb{C}$ non bornée.

2) Théorie de Cauchy et conséquences

Théorème 18: Soit g continue sur Ω . On a équivalence entre

1) g possède une primitive sur Ω .

2) $\forall$ chemin fermé γ dans Ω on a $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$

Théorème 19: (de Cauchy) Soient Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $w \in \Omega$ et g continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$, alors g possède une primitive dans Ω et

$\forall$ chemin fermé γ dans Ω , on a

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0$$

Théorème 20: Soit γ un chemin fermé sur Ω , $\lambda \in \text{Im}(\gamma)$ et $g \in H(\Omega)$. Si Ω est connexe alors

$$g(z) \text{Ind}_{\gamma}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - \lambda} dz$$

+ Th d'holomorphie

Application 21: Soit $a > 0$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$F(e^{-ax}) (\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{\lambda^2}{4a}\right)$$

Théorème 22: Soit $a \in \Omega$ et $g \in H(\Omega)$

1) $g \in H(\Omega)$ et le rayon de convergence de la série de Taylor de g au point a est au moins égal à $d(a, \partial\Omega)$

2) Si Ω connexe et γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \text{Im}(\gamma)$ on a:

$$g^{(n)}(a) \text{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Théorème 23: (Inégalité de Cauchy) Soit $R > 0$ et

$g \in H(D(0, R))$. $\forall z \in D(0, R)$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\forall r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| = \frac{1}{n!} |g^{(n)}(a)| \leq \frac{\sup_{|z|=r} |g(z)|}{r^n}$

Corollaire 24: (Liouville) Toute fonction entière et bornée est constante.

III - Fonctions méromorphes

1) Singularités

Définition 25: Soit $a \in \Omega$ et $g \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On appelle singularité isolée de g le point a .

Définition 26: Soit $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est une singularité effaçable pour f si f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a .

Définition 27: Soit $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est un pôle d'ordre m pour f s'il existe $a_1, \dots, a_m$ avec $m \geq 1$ et $a_m \neq 0$ telle que $f(z) = \sum_{k=1}^m a_k \frac{1}{(z-a)^k}$ ait une

singularité effaçable en a . Le coefficient a_1 s'appelle le résidu de f en a , noté $\text{Res}(f, a)$.

Définition 28: f est dite méromorphe sur Ω s'il existe une partie localement finie $A \subset \Omega$ telle que $f \in H(\Omega \setminus A)$. On note $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω .

2) Théorème des résidus

Lemme 29: Si γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \text{Int} \gamma$, on a: $\int_{\gamma} p(z) dz = \text{ind}_{\gamma}(a) \text{Res}(f, a)$

où $p(z) = \sum_{k=1}^m a_k (z-a)^{-k}$ comme dans la définition 27.

Théorème 30: Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ des points $\mathbb{C} \setminus \Omega$ distincts de Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé dans Ω dont l'image ne contient aucun des a_k . Alors:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

Exemple 31: Soit $\alpha > 1$, $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha + \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$

IV - Application aux polynômes orthogonaux.

On considère $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$

Définition 32: On appelle poids sur I , une application $\rho:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$$

Définition 33: On appelle $L^2(I, \rho) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty\}$

Proposition 34: $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert et contient les fonctions polynômes

Théorème 35: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux $e \in L^2(I, \rho)$ avec $\deg(P_n) = n$. (Famille de polynômes orthogonaux associée à ρ)

Exemple 36: $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$ (polynômes de Hermite)

Théorème 37: Soit ρ une fonction poids sur I .

S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_0^{+\infty} \rho(x) dx < +\infty$ alors

les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

DEVZ

On étend la notion de dérivée pour des fct de variables complexes.

zéros isolés
↳ pas de accumulation

Fct analytiques

↳ DSE $\forall x \in \mathbb{C}$

↳ Th prolongement

analytique : le comportement d'une fct analytique dans un disque arbitrairement petit détermine la fct

↳ dérivables

Fct holomorphes $H(z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Cauchy Riemann C.R.

Application aux

polynômes

orthogonaux

→ transformer des problèmes de densité dans un espace de Hilbert en un problème d'unicité analytique

24.5: Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

Que faire en cas de discontinuité?

↳ fct méromorphe $M(z)$

↳ singularités
Pôles

Th des Résidus

↳ généralisée

Th de Cauchy

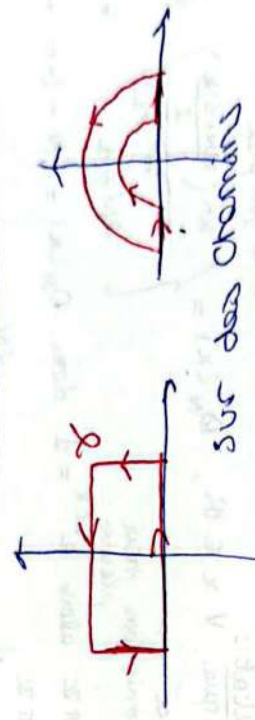
$$\oint \gamma(z) dz = 0$$

↳ notion d'indice = nb de tours de γ autour de z

$$\text{Ind}_{\gamma}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

→ ex Calcul de la TF de la Gaussienne DEVI

intégration et Holomorphic



DEVI