

243 Séries entières, propriétés de la somme Exemples et applications

I- Rayon de convergence

1) Définition [ELA] 233-235

- def SE
- lemme Abel
- Def + Th Rayon CV
- def disque CV
- exemples

2) Méthodes de calcul du rayon de CV 236-237

- Règle d'Alembert + ex
- Règle Cauchy + ex

3) Comparaison séries 238

$\sum a_n z^n$ de RCV R_a et $\sum b_n z^n$ de RCV R_b

- $|a_n| \leq |b_n|$
- $a_n = O(b_n)$
- $a_n \sim b_n$

4) Structure 239

- Produit de Cauchy
- somme de 2 séries

II- Analytité

1) Régularité des séries entières 241-242

- CVN
- C^∞ sur le disque CV
- ex

2) Fonctions développables en SE et analytique 245-246

- def DSE

- $$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

- def analytique

- ex $z \mapsto \frac{1}{1-z}$

III - Applications

1) Séries entières classiques

254 257 253

- exponentielle + prop
- cosinus et sinus
- Autres ex

2) Calcul d'une série par les séries entières

DEV1

- dev

3) Utilisation Equations diff

DEV2

- Méthode
- Nb de Bell

233: Séries entières, propriétés de la somme.
Exemples et applications

I - Rayon de convergence

1) Définitions:

Définition 1: On appelle série entière complexe toute série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où (a_n) est une suite donnée de nombres complexes

Exemple 2 (Abel): Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq |z| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument

Théorème 3: $\exists! R \in \mathbb{R}^+$ tel que

- 1) si $|z| < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument
- 2) si $|z| > R$, la série diverge

Définition 4: Cet élément R est appelé rayon de convergence de la série.

$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{la suite } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge}\}$
On appelle disque de convergence de la série l'ensemble $D(0, R)$.

Remarque 5: On ne peut rien dire sur le bord du disque

Exemples 6: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ont tous 1 comme rayon de convergence mais ne sont pas définies sur le même ensemble.

2) Méthodes de calcul du rayon de convergence

Proposition 7: (Règle de d'Alembert) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Si la suite de terme général $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ converge vers $L \in \mathbb{R}^+$ alors $R = \frac{1}{L}$ avec convention $\frac{1}{0} = +\infty$ si $L = 0$

Exemple 8: le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est $+\infty$

Proposition 9: (Règle de Cauchy-Hadamard)
Le rayon de convergence R d'une série entière est donné par $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$

Exemple 10: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{2}$

3) Comparaison de séries

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 2 séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

Proposition 11: Si $|a_n| \leq |b_n| \forall n \in \mathbb{N}$ alors $R_a \geq R_b$, si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$

Corollaire 12: Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$

4) Structure

Définition 13: Produit de Cauchy

$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Théorème 14:

On pose R le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$. Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$ et pour $1 \leq \min(R_a, R_b)$
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$

• En multipliant $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ par $\lambda \neq 0$ on ne change pas le rayon de convergence. Si $|z| < R_a$ on a:

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n$$

• On pose $R_{ab} = \min(R_a, R_b)$. Alors $R_{ab} > \min(R_a, R_b)$ de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

$$\text{Si } |z| < \min(R_a, R_b) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

II - Analyticité

1) Régularité des séries entières

Théorème 15: Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans le disque de convergence.

Théorème 16: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors la fonction somme S est continue sur $D(0, R)$ disque de convergence. Elle est même C^∞ avec $S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Exemple 17: $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est C^∞ sur $] -1, 1[$

2) Fonctions développables en série entière et analytiques

Définition 18: Soit f une fonction définie dans un voisinage X de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière (DSE) en z_0 s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R[$ tels que $D(z_0, r) \subset X$ et $\forall z \in D(z_0, r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Proposition 19: Si une fonction f est développable en série entière en z_0 , alors il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est C^∞ et le développement en série entière est donné par $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

Définition 20: On dit que f est analytique sur O un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ si elle est DSE en tout point de O .

Exemple 21: $f: z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est DSE sur $D(0, 1)$

III - Applications

1) Séries entières classiques

Définition 22: On appelle fonction exponentielle complexe et on note $z \mapsto e^z$, la fonction somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ qui a un rayon de convergence infini: $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Proposition 23: Soient z et $z' \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle vérifie: $\exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$
 $\exp(z) \neq 0 \quad \exp(z) = \exp(\bar{z}) \quad \exp(z) = \exp(iz) = \exp(-iz)$

Définition 24: On définit les fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{C}$ par:

$$\cos(z) = \operatorname{Re}(\exp(iz)) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \operatorname{Im}(\exp(iz)) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exemples 25: • $b_n(1+n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall n \in]-1, 1[$

• $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall n \in]-1, 1[$

• $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \forall n \in]-1, 1[$

2) Calcul d'une série par les séries entières

Application 26: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi^2}{16}$ DEV 1

3) Utilisation des équations différentielles

Méthode 27: On peut montrer qu'une fonction est DSE avec son équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 avec une condition initiale.

• On peut résoudre une équation différentielle avec des séries entières

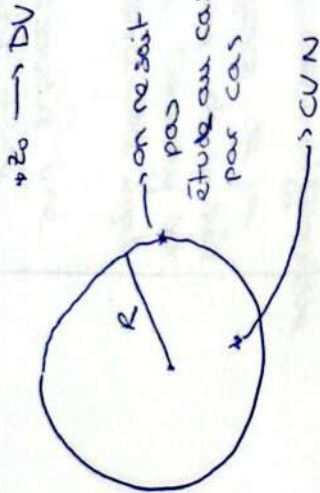
Application 28: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le nième nombre de Bell, noté B_n comme étant le nombre de partitions de $[1, n]$ et $B_0 = 1$. Ces nombres vérifient $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!}$

DEV 2

Serie d'un type particulier

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

sens?
cv?



243: SERIES ENTIÈRES, PROPRIÉTÉS de la somme. Exemples et applications

Pourquoi on étudie les SE?

- propriétés de CV remarquables
(∞ sur $D(0, R)$)

- Quelles sont les fcts bse?

$$La_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

- les SE ont de nombreuses utilités:
combinatoire, théorie des nombres, équations diff

exemples $\rightarrow$

calcul d'une
serie
DEV 1

Def du rayon de convergence
le + grand R

$\hookrightarrow$ comment le calculer
similaire aux séries
Regle d'Alcabit
Regle d'Hadamard

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad RCV = 1$$

$\hookrightarrow$ comparer les séries entières
pour avoir des relations entre
leur RCV

$\hookrightarrow$ somme et produit

nombre de bel
DEV 2