

[ELA]

[HAU]

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre exemples

Soit X un ensemble non vide et E un EV avec $\|\cdot\|$.

On considère $f: X \rightarrow E$ et (f_n) une suite d'applications de X dans E

I- Les différents modes de convergence

1) Suites de fonctions [ELA] 143-147

- def CVS CVU
- $CVU \Rightarrow CVS$ + contre exemple
- critère de Cauchy
- $B(E, X)$
- $f_n \in B(E, X)$ CVU vers f ssi $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$

2) Séries de fct [ELA] 193-197

[HAU] 251-253-254

- def
- CVS
- REXE
- CVU
- CVU ssi R_n CVU + CE e^{-nx}
- CVA
- CVN
- $CVN \Rightarrow CVU$
- $\Downarrow$
- $CVA \Rightarrow CVS$ + CE

II- Régularité et interversion

1) Continuité [ELA] 149-150 200

- Th $f_n \in C^0$ en $a \Rightarrow f \in C^0$ en a si CVU
- CE e^{-nx}
- Th de la double limite
- Th continuité série

2) Dérivabilité [ELA] 152 201-202 [HAU] 241

- Th $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$ si cv uniforme.
- CE $(x^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2}$
- Th $S'(x) = \sum f_n'(x)$
- ex $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

3) Interversion avec l'intégrale [ELA] 154, 158-159, 203

- Th $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
- Th CVD + ex
- Th $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$

III - Cas particulier des séries entières

1) Généralités [ELA] 233 - 244

- def
- lemme d'Abel
- Th/def RCV
- cv N sur $\mathbb{H}$ compact dans le disque
- S est C^∞ sur D
- ex $\frac{1}{(1-z)^2}$

DEV 1

- Nombres de Bell [Fra]

2) calcul d'une série par les séries entières

DEV 2

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi^2}{16}$

241: Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Soit X un ensemble non vide et E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On considère $f: X \rightarrow E$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans E .

I- Les différents modes de convergence

1) Suites de fonctions

Définition 1: On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X si, pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. Autrement dit, $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Définition 2: On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur X si: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Proposition 3: Si (f_n) converge uniformément sur X vers f alors (f_n) converge simplement vers f sur X .

Contre exemple 4: $X = [0, 1], E = \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0, 1]$ mais pas uniformément.

Théorème 5: Critère de Cauchy uniforme Supposons E complet. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$.

Définition 6: On note $B(x, \varepsilon)$ l'espace vectoriel des applications bornées de x dans E . On le munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \quad \forall f \in B(x, \varepsilon)$, ce qui en fait un espace vectoriel normé.

Proposition 7: $(f_n)_n \subset B(x, \varepsilon)$ converge uniformément sur X vers f si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2) Séries de fonctions

Définition 8: On appelle série de fonctions f_n , notée $\sum f_n$, la suite (S_n) où S_n désigne l'application de X dans E : $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ (la même somme partielle de la série $\sum f_n$).

Définition 9: $\sum f_n$ converge simplement sur X lorsque la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur X . On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sa limite.

Définition 10: on appelle reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$, la fonction R_n définie par: $\forall x \in X, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

Définition 11: On dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur X si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur X .

Proposition 12: Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers zéro.

Proposition 13: Si $\sum f_n$ converge simplement, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur X ssi (R_n) converge uniformément sur X vers zéro.

Contre exemple 14: $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f_n(x) = e^{-nx}$ converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}^{++}$.

Définition 15: On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur X si, $\forall x \in X$, la série réelle $\sum \|f_n(x)\|$ converge.

197 Définition 16: On dit que $\sum g_n$ converge normalement sur X si $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \in B(X, E)$ • la série $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.

Théorème 17: On a les implications suivantes pour la convergence de $\sum g_n$ sur X :

convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme
 $\Downarrow$
 convergence absolue $\Rightarrow$ convergence simple

Contre exemple 18: $g_n: x \in [0, 1] \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x}{n}$, on a $\sum g_n$

converge uniformément mais pas normalement.

• la série de l'exemple 14 converge absolument mais pas uniformément ni normalement.

II- Régularité et intervention

1) Continuité

Théorème 19: Soit $X \subset F$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(g_n)_n$ une suite uniformément convergente d'applications de X dans E . Si les fonctions g_n sont toutes continues en $a \in X$, alors leur limite g est continue en a .

Contre exemple 20: $g_n: x \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers 1. Mais non continue donc ne converge pas uniformément.

Théorème 21: (de la double limite) Soit $X \subset F$ un E de dim finie. Soit $(g_n)_n$ convergent uniformément sur X vers g . Soit $a \in X$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ la limite b_n de $(g_n(n))$ lorsque n tend vers a existe. Si E est complet on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$$

Corollaire 22: Soit $a \in X$, soit (g_n) suite de fonctions sur X , de valeurs dans E . On suppose $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n$ est continue en a et $\sum g_n$ converge uniformément sur X . Alors $\sum g_n$ est continue en a .

2) Dérivabilité

Théorème 23: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (g_n) une suite d'applications dérivables de I dans E , convergent simplement vers g . Si (g'_n) converge uniformément sur I alors g est dérivable sur I et $\forall x \in I \quad g'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'_n(x)$

Contre exemple 24: $g_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n})^{1/2}$ $x \in \mathbb{R}$ converge uniformément vers $|x|$ qui n'est pas dérivable.

Théorème 25: On suppose (g_n) dérivables sur I . On suppose que la série $\sum g_n$ est simplement convergente et la série $\sum g'_n$ est uniformément convergente sur I . Alors la fonction somme S est dérivable sur I : $\forall x \in I \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(x)$

Exemple 26: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^k \frac{(g_n(n))^k}{n^2}$

3) Intervention avec l'intégrale

Théorème 27: Soit (g_n) suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans E un $\mathbb{R}$ -espace. Supposons (g_n) converge uniformément, alors la fonction limite g est intégrable sur $[a, b]$ et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

Théorème 28: (convergence dominée) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(g_n)_n$ une suite de fonctions de J à b dans $\mathbb{R}$

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $]a, b[$, $\{f_n\}_n$ converge simplement sur $]a, b[$ vers f continue par morceaux, il existe $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive telle que $\int_a^b \varphi(x) dx$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq \varphi$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_a^b |f_n(x)| dx$ et $\int_a^b |f(x)| dx$ convergent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Exemple 29 : $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+1}+1} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Théorème 30 : Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors : $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

III - Cas particulier des séries entières

1) Généralités

Définition 31 : On appelle série entière toute série de fonctions $\sum g_n$ où $g_n : z \mapsto a_n z^n$ et $(a_n) \subset \mathbb{C}$.

Lemme 32 (Abel) : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Théorème / Définition 33 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup\{|r| \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de la série. On a :
1) si $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument
2) si $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ diverge.

Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est le disque de convergence

Théorème 34 : Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

Théorème 35 : La somme S de la série entière $\sum a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in] -R, R[$ $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k!}{n!} a_n x^{n-k}$ et $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Exemple 36 : $\forall z \in D(0,1)$ $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$

Application 37 : (Nombres de Bell)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le même nombre de Bell, noté B_n comme étant le nombre de partitions de $\{1, n\}$ et $B_0 = 1$

Ces nombres vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!}$

2) Calcul d'une série par les séries entières

Application 38 : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\pi^2}{16}$

DEV 2

Les suites de gct sont l'analogue des suites numériques où l'on veut associer un nb entier, on lui associe une gct .
On procède de m avec les séries.

CVS = parcellle
L' pas suffisant pour garder la c_0

CVU

$$CVU \Rightarrow CVS$$

~~x^n~~ sur $[0,1]$

> critère de Cauchy uniforme

241: Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Régularité?

Similaire aux intégrales on a des Th de C^0 et dérivabilité d'intégration des limites

$$\int \Sigma = \Sigma \int ?$$

oui ss condition de convergence particulière

série de

$$gct \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

CVS
relier aux suites S_n

Cas particulier

Séries entières $\rightarrow$ Rayon de CV $\Sigma a_n z^n$

Nb de Bch DEV1

Calcul d'une série par les séries entières DEV2

$$CVN \Rightarrow CVU \Downarrow CVA \Rightarrow CVS$$

$$ouverts + gct \quad L \rightarrow CVA \quad \Sigma \|g_n(x)\| CV$$

CVU

$$\Sigma g_n CVU \Rightarrow g_n \rightarrow c$$

$$CVU \Rightarrow CVS$$

$$\Delta \quad e^{-nx} \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$CVN \quad \Sigma \|g_n\| CV$$