

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemple et applications

I - Régularité d'une fonction déf par une intégrale à paramètres

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré I intervalle de $\mathbb{R}$

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \quad \forall t \in I$$

• Th CVD [ELA2] 409

1) Continuité 410

- Th
- ex $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \in C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$

2) Dérivabilité 411

- Th
- généralisat° $C^k \subset C^\infty$
- Intégrale de Gauss

DEV1

II - Convolution 75 - 87

- def + ex
- convolut° dans L^1
- $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ algèbre commutative
- dans $L^1 = L^p$
- dans $L^p = L^q$
- approximation unité
- $f * \varphi_j \xrightarrow{L^p} f$

III - TF dans L^2 109 - 122

- def
- Riemann-Lebesgue

- $\mathcal{F}$ lin C^∞
- ex
- $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$
- $\widehat{fg} = \widehat{f}\widehat{g}$
- TF injective
- Formule d'inversion
- dérivées

IV - Etude de la fonction Gamma [G] 295

DEV2

- def Γ et β
- Th
- Γ par lg convexité

239: Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et Applications

Soit (X, d, μ) un espace mesuré, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application définie sur $X \times I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \quad \forall t \in I.$$

I-Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Théorème 1: (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables convergant simplement vers une fonction f . Supposons qu'il existe une fonction intégrable g dominant toutes les f_n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \leq g \text{ sur } X$$

Alors f est μ intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

1) Continuité

Théorème 2: Continuité sous le signe intégrale

On suppose: 1) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ intégrable

2) Pour presque tout $x \in X, t \mapsto f(x, t)$ continue sur I

3) Pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que $\forall x \in X, \forall t \in K$

$$|f(x, t)| \leq g_K(x)$$

alors la fonction F est continue sur I .

Exemple 3: $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$

2) Dérivabilité

Théorème 4: (Dérivabilité sous le signe intégrale)
On suppose que l'intervalle I est ouvert et

1) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ intégrable

2) Pour presque tout $x, t \mapsto f(x, t)$ dérivable sur I

3) Pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que pour tout x pour lequel $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\forall t \in K \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g_K(x).$$

Alors F est dérivable sur I de dérivée:

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

Remarque 5: Le théorème se généralise pour des fonctions de classe C^k ou $C^\infty, k \in \mathbb{N}$.

Application 6: Soit $a > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

II-Convolution

Définition 7: On dit que 2 fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit le produit de convolution: $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$

Exemple 8: Soit $f = \chi_{[a,b]}$ et $g = \chi_{[c,d]}$ avec $a < b$
 alors $f * g(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq x \leq b-a \\ b-a-x & \text{si } b-a \leq x \leq b+a \\ 0 & \text{si } b+a < x \end{cases}$

Théorème 9: (convolution dans L^1) Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R})$
 1) Pour presque tout x , $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
 2) La fonction $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
 3) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Proposition 10: $L^1(\mathbb{R})$ muni du produit de convolution est une algèbre commutative.

Théorème 11: (convolution dans L^2 - L^p) Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors pour presque tout x , $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_p \leq \|f\|_2 \|g\|_p$

Théorème 12: (convolution L^p - L^q) Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son conjugué. Alors $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, on a: 1) $f * g$ bien définie sur $\mathbb{R}$ et bornée de plus $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$
 2) $f * g$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Définition 13: On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$, toute suite $(\varphi_j)_j$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que:
 1) $\forall j \in \mathbb{N}^*$ $\varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x) dx = 1$
 2) $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi_j(x) dx = 0$

Théorème 14: Soit $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$.

- 1) Si f uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$
- 2) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, +\infty[$, alors $f * \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} f$

III - Transformée de Fourier dans L^2

Définition 15: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$, la fonction:

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Lemme 16: (Riemann-Lebesgue) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Théorème 17: Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_2$. On définit alors la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$F: f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$$

Corollaire 18: La transformation de Fourier est une application linéaire continue.

Exemple 19: $F\left(\frac{1}{2} e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$
 $F(\chi_{[a,b]})(\xi) = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right) e^{-i\frac{a+b}{2}\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$

Proposition 20: Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

Proposition 21: Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a:

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \widehat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v) g(v) dv$$

Théorème 22: La Transformation de Fourier est une application injective.

Théorème 23: (Formule d'inversion) Si $f \in L^1$ et

$$\widehat{f} \in L^1, \text{ alors } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Proposition 24: Soient $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$$

Proposition 25: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée continue bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}(\xi) = -i \widehat{xf}(2)$$

IV - Etude de la fonction gamma

Définition 26: Pour $x > 0$ et $y > 0$ on définit:

$$1) \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ est la fonction gamma}$$

$$2) B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \text{ est la fonction Beta}$$

Théorème 27: On a:

1) Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2) Γ et $\log(\Gamma)$ sont convexes sur $\mathbb{R}^{+*}$

3) $\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$

$$4) \Gamma(x) \sim \frac{1}{x} \text{ as } x \rightarrow +\infty$$

$$5) \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Théorème 28: Soit F l'ensemble des applications

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ vérifiant:}$$

$$1) f(1) = 1$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x+1) = xf(x)$$

3) f est convexe

$$\text{Alors } F = \{\Gamma\}$$

$x \mapsto \int_0^x f(t) dt \in C^0$?
dérivable?

$\hookrightarrow$ analogue aux
séries de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ on voit
l'intégrale comme une
généralisation de la somme

TF intervient dans
de nombreux pb d'analyse
(ex chaleur) ex d'intégrale
à paramètre

$\hookrightarrow$ bcp de propriétés

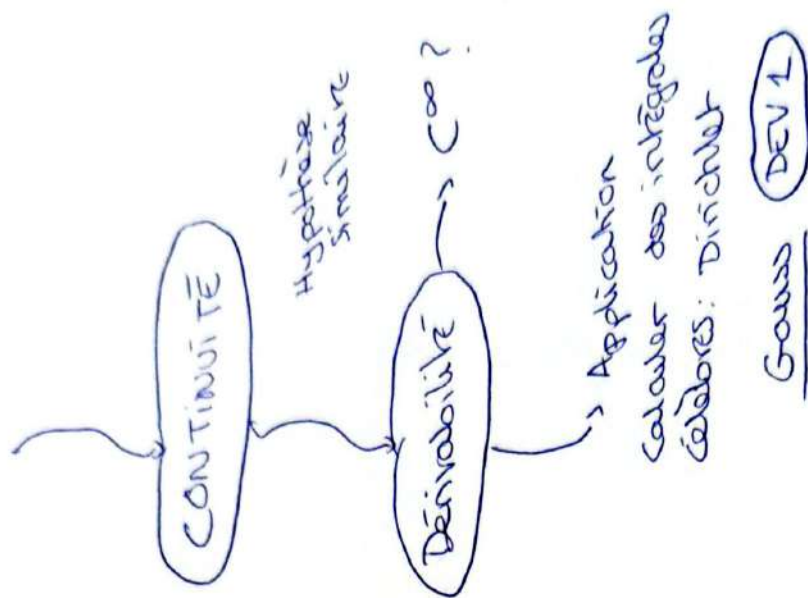
$F: L^1 \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ lin^{co}
 $f \mapsto \hat{f}$ injective

Fonction Gamma DEV2
 $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad n > 0 \quad C^\infty$

convexe ... pleins de prop
intéressantes.

Quels sont les régularités
des intégrales à
paramètre?

Th CVD crucial car
sert d'outil pour démontrer
les Th fondamentaux de la
leçon



239 Fonctions définies par une
intégrale dépendant d'un paramètre
Exemple et application

la convolée
hérite des bonnes
prop des 2 fct
 $\hat{f} \hat{g}$
le meilleur
produit

Le produit de 2 fct
intégrables n'est pas
nécessairement intégrable

$(L^1, \|\cdot\|) + * =$ algèbre
commutative