

[TL1]  
[G]  
[ELAZ]  
[TAU]

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fct d'une ou plusieurs variables

## I-Méthodes de calculs d'intégrales d'une fonction à une variable

### 1) Primitives [TL1] 758 [G] 131

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$

- Th fct admet une primitive
- Th fondamental + corollaire
- ex sinus et  $\frac{1}{1+x^2}$
- décomposition en éléments simples + exemples

### 2) IPP [G] 127

- Th
- ex  $\int_1^t \ln(x) dx$

### 3) Changement de variable [TL1] 764

- Th
- ex  $\int_0^{4\pi} \cos(t) e^{\sin t} dt$

## II-Méthodes de calculs d'intégrales de fct à plusieurs variables

### 1) Théorèmes de Fubini [ELAZ] 422

$(X, \mathcal{A}, \mu)$   $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  deux espaces mesurés  $\mu, \nu$  finis

- Th Fubini - Tonelli
- Th Fubini - Lebesgue
- CE  $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$

### 3) Changement de variables généralisé [G] 354

- Th
- ex coordonnées polaires
- Volume boule unité



Dev 1 a)

• Intégrale de Gauss

### III - Intégrales à paramètres [ELA2] 409 - 411

$I \in \mathbb{R}$   $E = \text{evn complet}$

- Th CVD + ex
- Th Continuité et dérivabilité
- Intégrale de Gauss
- Intégrale de Dirichlet

Dev 1 b)

### IV - La Théorie de Fourier

#### 1) Les séries de Fourier [ELA2] 173 - 176

- def  $cn(f)$
- def série de Fourier
- Th de Dirichlet
- Intégrale de Fresnel

DEV2

#### 2) La TF [ELA2] 109

- def
- Th app linéaire  $C^0$ , injective
- TF de la Gaussienne

### IV - Calcul d'intégrales avec l'analyse complexe

ouvert de  $\mathbb{C}$   $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

[TAU] 69

- def chemin et intégrale selon chemin 76
- Th Cauchy 103
- ex pour Dirichlet
- Th Residus
- TF de la Gaussienne

DEV2



2.36: Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

I - Méthodes de calculs d'intégrales d'une fonction à une variable.

1) Primitives.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Théorème 1: Toute fonction  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue admet une primitive. Plus précisément, la primitive de  $f$  qui s'annule en un point  $a \in I$  est l'application  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

Théorème 2: Fondamental de l'analyse.

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$ . Alors:

$$\forall \alpha, \beta \in I, \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) dt = f(\beta) - f(\alpha).$$

Corollaire 3: Soit  $f$  continue sur  $I$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  alors:  $\forall (a, b) \in I, \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

Exemple 4:  $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan(x)]_0^A = \frac{\pi}{2}.$$

Théorème 5: Décomposition en éléments simples.

Soit  $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$  irréductible. Soit  $Q = D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n}$  la décomposition en produit d'irréductibles de  $Q$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . Il existe  $E$  et  $(A_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq a_i}$  dans  $\mathbb{K}[X]$  uniques tels que

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{a_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \quad \text{et} \quad \deg(A_{ij}) < \deg(D_i)$$

Exemple 6:  $\int_2^x \frac{t^4 - t^2 + 1}{t^2 - 1} dt = \int_2^x \frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} + \frac{1}{t^2 - 1} dt$

$$= \frac{x^3 - 8}{3} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{2} \ln(3)$$

2) Intégration par parties

Théorème 7: Soient  $f, g$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Alors:  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$ .

Exemple 8: Primitive de la fonction logarithme sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $\int_1^t \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^t - \int_1^t x \frac{1}{x} dx = t \ln(t) - t + 1$ . Les primitiver de  $\ln$  sont de la forme  $t \mapsto \ln(t)t - t + c, c \in \mathbb{R}$ .

3) Changement de variable

Théorème 9: Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$ , à valeurs dans un intervalle  $J$ . Si  $a, b \in I$  et  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  continue alors  $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$ .

Exemple 10:  $\int_0^{ut} \cos(t) e^{\sin(t)} dt$  peut être calculé à l'aide du changement de variable  $\varphi = \sin$ . Donc  $\varphi' = \cos$  et on a:  $\int_0^{ut} \cos(t) e^{\sin(t)} dt = \int_{\sin(0)}^{\sin(ut)} e^x dx = 0$ .

II - Méthodes de calculs d'intégrales de fonctions à plusieurs variables.

1) Théorème de Fubini.

Soient  $(X, \mathcal{F}_X, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{F}_Y, \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis.

Théorème 11: Fubini-Tonelli.

Soit  $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable positive. Alors

- $\forall x \in X, y \in Y \mapsto f(x, y)$  et  $\forall y \in Y, x \in X \mapsto f(x, y)$  sont mesurables.
- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y), y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  sont mesurables.
- $\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$ .





Théorème 12: Fubini - Lebesgue.

Soit  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et intégrable. Alors

1. pour presque tout  $y \in Y$ ,  $x \mapsto f(x, y)$  est intégrable sur  $X$ .  
pour presque tout  $x \in X$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  est intégrable sur  $Y$ .

2.  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  est intégrable sur  $Y$ .

$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  est intégrable sur  $X$ .

$$3. \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Contre exemple 13: Soit  $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ .

$$\int_0^1 \int_0^{+\infty} f(x, y) dy dx = 0 \neq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

car  $f$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1] \times [0, +\infty[$ .

2) Changement de variable généralisé.

Théorème 14: ADHIS. Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi: U \rightarrow V$  un  $C^1$ -diffeomorphisme et  $f: V \rightarrow K$  intégrable. Alors  $f \circ \varphi \times |\det \text{jac} \varphi|$  est intégrable sur  $U$  et:

$$\int_U f(\varphi(u)) |\det \text{jac} \varphi(u)| du = \int_V f(x) dx.$$

Remarque 15: Cas particulier: les coordonnées polaires

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Exemple 16: Volume de la boule unité  $B_d$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

$$\text{Vol}(B_d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})} \quad \text{avec} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Application 17: Calcul de l'intégrale de Gauss  $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$  à l'aide des coordonnées polaires.

### III - Intégrales à paramètres

$I$  désigne un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ ,  $I = [a, b]$  et  $E$  désigne un espace vectoriel normé complet.

Théorème 18: Convergence dominée

Soit  $(g_n)_n$  une suite de fonctions continues par morceaux de  $I$  dans  $E$  vérifiant

- i) Il existe une fonction positive  $\varphi$ , continue par morceaux, intégrable sur  $I$  telle que  $\|g_n\| \leq \varphi \quad \forall n$

- ii) La suite de fonctions  $(g_n)_n$  converge simplement vers une fonction  $g: I \rightarrow E$  continue par morceaux

Alors  $g_n$  et  $g$  sont intégrables sur  $I$  ( $t_n$ ) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I g_n = \int_I g$$

Exemple 19: Soit  $x > 1$ . On pose  $I_n(x) = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t}{n})^n e^{-xt} dt$ .  
 $n \geq 1$  Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(1-x)t} dt = \frac{1}{x-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-t} dt$

Théorème 20: Continuité sous le signe intégral

Soit  $A$  un espace métrique et  $g: A \times I \rightarrow E$  vérifiant

- i)  $\forall x \in A, g(x, \cdot): I \rightarrow E$  est mesurable sur  $I$
- ii)  $\forall t \in I, g(\cdot, t): x \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $A$
- iii) Il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que  $\|g(t, x)\| \leq \varphi(t) \quad \forall x \in A$

Alors  $\phi: A \rightarrow E$  est bien définie et continue sur  $A$ .



Théorème 21: (Dérivabilité sous le signe intégrale)

Soit  $A$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f: A \times I \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$(i) \forall x \in A \quad f(x, \cdot): t \mapsto f(x, t) \text{ intégrable sur } I$$

ii)  $\forall t \in I \quad f(\cdot, t): x \mapsto f(x, t)$  dérivable sur  $A$  de dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$

iii) Il existe une fonction  $\gamma$  positive continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \gamma(t) \quad \forall x \in A.$$

Alors  $\phi: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $C^1$

$$\text{sur } A \text{ et on a } \forall x \in A \quad \phi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Application 22: Calcul de l'intégrale de Gauss en faisant apparaître une équation différentielle.

DEV 11 b)

Application 23: (Intégrale de Dirichlet)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

IV - La Théorie de Fourier1) Les séries de Fourier

Définition 24: Soit  $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On appelle  $n$  ième coefficient de Fourier de  $f$ , le nombre complexe  $c_n(f)$  donné par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Définition 25: Soit  $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On appelle série de Fourier de  $f$   $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)$

Théorème 26: (Dirichlet) Soit  $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On suppose  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$

Application 27: (Fresnel)

DEV 2

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2) La Transformée de Fourier.

Définition 28: Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\hat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$ , la fonction:

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Théorème 29: La fonction  $\mathcal{F}: \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$   $f \mapsto \hat{f}$

est une application linéaire, continue, injective.

Application 30: Soit  $f(x) = e^{-ax^2}$  avec  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors } \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$



Définie par Cauchy et Riemann avant d'être généralisée par Lebesgue et d'être au cœur de bien des domaines

Comment  
→  
calculer

Question fréquente mais il n'y a pas de procédure automatique, mais de nombreux outils de calcul

### Théorie de Fourier

Calcul d'intégrales avec les séries de Fourier

calcul des TF  

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

ix Fresnel  
 DEV2

Analyse complexe  
 sur un contour



Intégrales à paramètres

Continues? → Th  
 Dérivables? → Th  
 Gauss méthode 2

2.36: Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

→ pas compliqué

• I.P.P.  $\int g' \int g$  on reconnaît une certaine expression par rapport aux primitives, Gauss

• changement de variable

Forme plus simple à manipuler

outil de multidimensionnel

→ Th Fubini

Pour réarranger les intégrales

$$\int_A \int_B \dots = \int_B \int_A \dots$$

Intégrale de Gauss DEV1

### 1) Fonctions d'une variable

→ cas simples

→ méthodes directes

- calcul de primitives
- décomposition en éléments simples