

234: Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue intégrable

$(X, \mathcal{A})$ espace mesurable λ mesure de Lebesgue

I- Intégrales de fct mesurables

1) Fct étagées positives 105

- def fct étagées et intégrale de fct étagées

2) Fct mesurables positives 108-110

- def intégrale
- propriétés de l'intégrale

3) Fct mesurable qc 110-112

- def intégrale avec $f = f^+ - f^-$
- Rq f intégrable ssi $|f|$ intégrable
- Rq: extension aux fct complexes $\int_X f d\lambda = \int \operatorname{Re}(f) d\lambda + i \int \operatorname{Im}(f) d\lambda$
- propriétés

II- Construction des espaces L^2 et L^p

1) De L^1 à L^2 114-115

$\mathcal{L}^1(X, d\lambda) =$ ensemble fct λ intégrables sur X

- Th: $\int f d\lambda = 0$ ssi $f = 0$ pp
- $f \sim g$ ssi $f = g$ λ pp
- $L^1(X, d\lambda) = \mathcal{L}^1(X, d\lambda) / \sim$
- $(L^1(X, d\lambda), \|\cdot\|_1)$ evn

2) les espaces L^p $p \in [1, \infty]$ 170-171

- def L^p et L^∞
- Th: Inégalité de Holder et généralisée + inég Minkowski
- $L^p \subset L^q$ si $1 \leq q \leq p < \infty$ $\lambda(X) < \infty$

DEV 1

III - Grands théorèmes d'intégration

1) Th de CV pour les suites de fct 115 - 120

DEV 2

- Th CV monotone + CE avec f_n non croissante
- Th CVD
- Lemme de Fatou

2) Th de CV pour les intégrales à paramètres 151

- continuité et dérivabilité

3) Fubini 153

IV - Applications aux TF dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ 336

DEV 3

- définition
- Th injectivité de la TF
- prop
- Th d'inversion

Intégrale de Lebesgue Goudon

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue intégrables

$(X, \mathcal{A})$ espace mesurable. λ mesure de Lebesgue

I- Intégrales de fonctions mesurables

1) Fonctions étagées positives

Définition 1: $e: X \rightarrow \mathbb{R}$ étagée positive s'il existe $I \in \mathcal{I}_{fin}$ ensembles mesurables $S_1, \dots, S_I$ et de réels positifs $a_1, \dots, a_I$ tels que:

$$e(x) = \sum_{i=1}^I a_i \mathbb{1}_{S_i}(x)$$

Définition 2: Soit e étagée positive. On appelle

intégrale de Lebesgue de e sur X par rapport à

λ , le réel positif défini par:

$$\int_X e d\lambda = \sum_{i=1}^I a_i \lambda(S_i)$$

On dit que e est Lebesgue intégrable si $\int_X e d\lambda < +\infty$

En particulier, e est intégrable ssi tous les S_i tels que $a_i \neq 0$ sont de mesure finie

2) Fonctions mesurables positives

Définition 3: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable positive.

On appelle intégrale de Lebesgue sur X par rapport à λ , le réel positif:

$$\int_X f d\lambda = \sup \left\{ \int_X e d\lambda, e \text{ étagée}, \forall x, 0 \leq e(x) \leq f(x) \right\}$$

On dit que f est Lebesgue intégrable si $\int_X f d\lambda < +\infty$

Lemme 4: Soit $(e_n)_n$ une suite croissante de fonctions étagées positives telle que $\forall x \in X, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(x)$

Alors $\int_X f d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X e_n d\lambda$

Théorème 5: Soient f, g mesurables positives et E, F ensembles mesurables

$$1) [0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ } \lambda \text{ pp } x \in E] \Rightarrow 0 \leq \int_E f d\lambda \leq \int_E g d\lambda$$

$$2) [E \subset F] \Rightarrow \int_E f d\lambda \leq \int_F f d\lambda$$

$$3) E \cap F = \emptyset \Rightarrow \int_{E \cup F} f d\lambda = \int_E f d\lambda + \int_F f d\lambda$$

3) Fonctions mesurables quelconques

Définition 6: Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable.

On pose $f^+ = \max(f, 0)$; $f^- = \max(-f, 0)$ $f = f^+ - f^-$

On dit que f est intégrable sur X si f^+ et f^-

le sont et on pose: $\int_X f d\lambda = \int_X f^+ d\lambda - \int_X f^- d\lambda$

Remarque 7: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable ssi $|f| = f^+ + f^-$ intégrable

On peut étendre aux fonctions complexes $f: X \rightarrow \mathbb{C}$

mesurable et intégrable ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont

$$\text{Alors } \int_X f d\lambda = \int_X \operatorname{Re}(f) d\lambda + i \int_X \operatorname{Im}(f) d\lambda$$

Théorème 8: 1) Linéarité: f, g intégrables, $a, b \in \mathbb{R}$

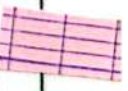
$$\int_X (af + bg) d\lambda = a \int_X f d\lambda + b \int_X g d\lambda$$

2) Monotonie: f, g intégrables $f \leq g$ λ pp

$$\text{Alors } \int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda$$

3) si $|f| \leq g$ λ pp et g intégrable alors f intégrable

4) si f intégrable alors $|\int_X f d\lambda| \leq \int_X |f| d\lambda$



II - Construction des Espaces L^p et L^1

1) De $L^1 \subset L^2$

$L^2(X, d\lambda)$ est l'ensemble des fonctions L^2 -intégrables sur X

Théorème 9: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive

Alors $\int_X f d\lambda = 0$ ssi $f = 0$ λ -pp

Corollaire 10: f intégrable et $g = f$ λ -pp

Alors g intégrable et $\int_X f d\lambda = \int_X g d\lambda$

On pose $f \sim g$ ssi $f = g$ λ -pp

On note $L^2(X, d\lambda) = L^2(X, d\lambda) / \sim$

Théorème 11: $(L^2(X, d\lambda), \|\cdot\|_2)$ est un e.v.n avec

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 d\lambda \right)^{1/2}$$

2) Les espaces L^p $p \in [1, +\infty]$

Définition 12: Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose

$$L^p(X, d\lambda) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}, |f|^p \in L^1(X, d\lambda)\}$$

et pour $f \in L^p(X, d\lambda)$ $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{1/p}$

Définition 13: Soit $p = \infty$, on pose

$$L^\infty(X, d\lambda) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}, \exists t > 0, \lambda(\{ |f| > t \}) = 0\}$$

et pour $f \in L^\infty(X, d\lambda)$ $\|f\|_\infty = \inf_{t > 0} \{ \lambda(\{ |f| > t \}) = 0 \}$

Théorème 14: Inégalité de Hölder

Soit $f \in L^p, g \in L^q$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Théorème 15: Inégalité de Minkowski

$$1 \leq p < +\infty \text{ et } f, g \in L^p(\Omega) \quad \left(\int_\Omega |f+g|^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

DEV 1

Conséquence 16: si $\lambda(X) < +\infty$ si $1 \leq q \leq p \leq \infty$

$$L^p(X, d\lambda) \subset L^q(X, d\lambda)$$

III - Grands Théorèmes d'intégration

1) Théorèmes de convergence pour les suites de fonctions

Théorème 17: Convergence monotone

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives

sur X telle que pour λ -presque tout $x \in X, (f_n)_n$ est

croissante.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \in [0, +\infty]$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda = \int_X f d\lambda$$

Contre exemple 18: Dans le cas où f_n pas croissante

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, +\infty[}(x) \text{ décroissante positive } \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n, +\infty[}(x) dx = +\infty$$

$$\text{mais } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Théorème 19: Convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur X

telle que : 1) Pour λ -presque tout $x, f_n(x) \rightarrow f(x)$

2) Il existe $g \in L^1(X, d\lambda)$ mesurable telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ pour } \lambda\text{-presque tout } x, |f_n(x)| \leq g(x)$$

$$\text{Alors } f \in L^1(X, d\lambda), f_n \in L^1(X, d\lambda) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda = \int_X f d\lambda$$

Lemme 20: (Fatou)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur X ,

$$\text{positives, alors } \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\lambda$$

2) Théorème de convergence pour les intégrales à paramètres

Soit E un e.v.n. On considère la fonction $f: x \mapsto \int_E f(x) d\lambda$

on s'intéresse à $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto \int_E f(x, t) d\lambda(x)$$

Théorème 21: Continuité sous l'intégrale

On suppose

- i) $x \mapsto f(x, t)$ mesurable
- ii) $t \mapsto f(x, t)$ continue
- iii) Il existe $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ mesurable tq $\forall t \in \mathbb{R}$
pour λ -presque tout x $|f(x, t)| \leq g(x)$

Alors φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 22: Dérivation sous l'intégrale

On suppose

- i) $x \mapsto f(x, t)$ mesurable et intégrable
- ii) $t \mapsto f(x, t)$ dérivable pour λ -presque tout x
- iii) Il existe $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ mesurable tq
pour λ -presque tout x $\forall t \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$

Alors φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$

3) Théorèmes de Fubini

Théorème 23: Fubini-Lebesgue

Soit $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que

$$(*) \int_X \int_Y |f(x, y)| dy dx < \infty \text{ ou } \int_Y \int_X |f(x, y)| dx dy < +\infty$$

$$\text{Alors } \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy$$

Remarque 24: Si l'on remplace l'hypothèse (*) par "f positive" on a Fubini-Tonelli

IV- Application aux Transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 25: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx$ est mesurable.

On définit: $\hat{\hat{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt$ la transformée de Fourier de $\hat{f}$ en x .

Propriétés 26: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

- 1) $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$
- 2) $\hat{f}$ est continue bornée par $\|f\|_1$ linéaire

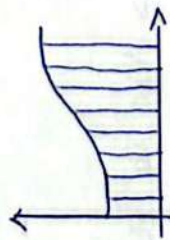
Théorème 27: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x) dx \quad \boxed{\text{DEV2}}$$

Théorème 28: Injectivité de la Transformée de Fourier

$$F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \quad f \mapsto \hat{f} \quad \text{est injective}$$

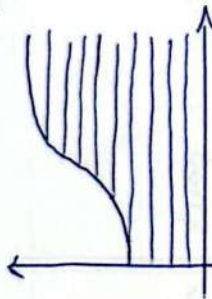
Riemann



Problèmes

- compacité
- comportements limites
- $\mathbb{R}_a$

Lebesgue



Comment les construire

$\hookrightarrow$ 84 étapes

$\hookrightarrow$ 84 mesurables positives

$$\hookrightarrow g = g^+ - g^-$$

- propriétés:
- monotone
 - linéaire
 - négativité Δ

234; Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue intégrable

Application aux TF dans L^1

Injectivité de la TF
DEU 2

$\hookrightarrow$ Théorèmes utiles
monotones CVD

Fatou

Fubini Lebesgue

continuité et dérivabilité
sous $\int$

espace
Banach

$\hookrightarrow$ construction des espaces L^1 et L^p
en partant de L^1 fonctions Lebesgue
intégrable

$\hookrightarrow$ notion pp $L^1 = L^1/\sim$

$$L^p \rightarrow \int |g|^p < +\infty$$

$$L^\infty \parallel g \parallel_\infty < +\infty$$

Holder Minkowski
DEU 1

+ Riesz Fischer