

230: Série de nombres réels ou complexes Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques Exemples

I- Généralités [ELA] 85-86

1) Définitions

(u_n) suite à valeurs réelles ou complexes

- def série S_n
- def cv simple + ex série géométrique
- def reste

2) Premières prop 88

- Prop: $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum x u_n + v_n$ cv
- $\sum u_n$ cv $\Rightarrow u_n \rightarrow 0$
- ex: $\sin(n) \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum \sin n$ diverge
- def série télescopique

II- Étude de la convergence d'une série

1) Cas général 89-90

- Th: critère de Cauchy
- ex série harmonique ne satisfait pas Cauchy
- Def absolument cv
- Th abs cv $\Rightarrow$ cv
- Réciproque fausse ex $\frac{(-1)^n}{n}$

2) Série à termes positifs 81-82-93 97

- Lemme: $\sum u_n$ cv ssi S_n majorée
- Th comparaison 2 suites ex: $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$
- Th équivalence + ex
- Th comparaison série intégrale

DEV1

• Application: série harmonique

3) Critères de convergence 94-100

- Riemann, Bertrand

- Règle de Cauchy et d'Alembert
- ex

4) Séries alternées 102-103

- def + exemple
- critère de Leibniz
- exp $\sum (-1)^{n-2} n^{-\alpha}$

5) Produit de Cauchy 106-107

- def
- Th de CV

III - Application et introduction aux séries entières

233-234

- def
- Th rayon de CV
- def rayon de convergence

DEV2

• Etude de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi^2}{16}$

Suites et séries numériques de f et ϵ Amrani
Cours X-ens analyse 1

230: Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques exemples

I - Généralités

1) Définitions

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1: On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

On note cette série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Définition 2: On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, on note S sa limite qu'on appellera somme de la série. $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Exemple 3: (série géométrique)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \text{ si } a \neq 1 \text{ et si } |a| < 1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

Définition 4: Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est une série convergente de somme S , on note $R_n = S - S_n$, le reste d'ordre n de la série

2) Premières propriétés

Proposition 5: Soit $a \in \mathbb{C}$, si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ convergent alors $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$ converge et sa somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Proposition 6: Si une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Définition 7: On dit qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge grossièrement si (u_n) ne tend pas vers 0.

Exemple 8: La suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc sa série diverge

Définition 9: On appelle série télescopique associée à une suite numérique (a_n) , la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ où $u_n = a_n - a_{n+1}$

Proposition 10: Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et (a_n) ont la même nature et en cas de convergence, on a $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_0$

II - Etude de la convergence d'une série

1) Cas général

Théorème 11 (Critère de Cauchy) Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si elle satisfait:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^m u_k \right| \leq \varepsilon$$

Exemple 12: La série harmonique diverge car elle ne satisfait pas le critère: avec $p=1$

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} = n \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Définition 13: Une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est convergente

Théorème 14: Toute série absolument convergente est convergente

Remarque 15: La réciproque est fautive

Exemple avec $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $u_n = \frac{1}{n^p}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}$ $p \in \mathbb{N}^*$ $\forall n \geq 1$ $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = 0$ et $S_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}$

S_n et S_{n+1} convergent vers la même limite mais $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge



2) Série numérique à termes positifs

Lemme 16: Une série à termes positifs converge si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles est majorée

Théorème 17: Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n \forall n \geq 0$. Alors

1) Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

2) Si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge

Remarque 18: Tout cela est vrai si la majoration $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Exemple 19: $v_n = 1 \forall n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \forall n$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. $u_n = \frac{1}{n^2}$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \forall n \geq 1$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 20: Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ des séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ quand $n \rightarrow +\infty$. Alors

- 1) les séries sont de même nature
- 2) si elles convergent, les restes sont équivalents
- 3) si elles divergent, les sommes partielles sont équivalentes

Exemple 21: $u_n = \sin(\frac{\pi}{n})$, $v_n = \frac{1}{n}$ terme général d'une série convergente donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge

Théorème 21: (Comparaison série intégrale) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive et décroissante. Alors $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature

En cas de convergence on a: $\int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{n+1} f(x) dx$

Application 22: On pose pour $n \geq 1$ $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Alors $\exists \gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$

3) Critères de convergence

Théorème 23: (Séries de Riemann) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha > 1$) converge

Proposition 24: (Règle de Cauchy) Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes réels ou complexes et soit $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$

- 1) Si $L < 1$, la série converge absolument
- 2) Si $L > 1$, la série diverge

Exemple 25: $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$

$\forall n \geq 1$ $\sqrt[n]{|u_n|} = (1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} u_n$ converge

Proposition 26: (Règle de d'Alembert) Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une suite de nombres réels ou complexes non nuls à partir d'un certain rang. On note

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

- 1) Si $L < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument
- 2) Si $L > 1$, la série diverge

4) Séries alternées

Définition 27: On appelle série alternée toute série de terme général $(-1)^n u_n$ où (u_n) est une suite réelle de signe constant.

Théorème 28: (critère de Leibniz) Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ est convergente. De plus son reste vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$

Exemple 29: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

5) Produit de Cauchy

Définition 30: Étant donné deux séries numériques $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, on définit leur produit comme la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$

Théorème 31: Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ deux séries numériques convergentes de somme S et T respectivement.

Si l'une des 2 est absolument convergente alors la série produit converge et a pour somme ST .
Si les 2 sont absolument convergentes, la série produit aussi

III - Introduction aux séries entières et application

Définition 32: On appelle série entière de variable complexe toute série de fonctions $\sum g_n$ dans laquelle g_n est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto a_n z^n$ où (a_n) est une suite donnée de nombres complexes

lemme 33: (Abel): Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument

Théorème 34: $\exists! R$ tel que

- 1) si $|z| < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument
- 2) si $|z| > R$, la série diverge.

On appelle R le rayon de convergence de la série.

Application 35: Calcul d'une série avec les séries de

fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{\pi^2}{16}$ DEV 2

Il faut d'abord

savoir définir une série et ses propriétés.

On fixe les notations

L'étude des sommes partielles et restes

comme outils

avant de se demander

comment elle converge

comment comprendre, reconnaître et exploiter la C.U. des séries

230: séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes et des sommes partielles des séries numériques. Exemples

Convergence = élément principal de la leçon

critères?

général

Cauchy (comme séries)

Riemann

Comparaison

$\sum u_n$

$\sum v_n$

lien

$\sum u_n$ et $\sum v_n$

⚠️ séries à termes positifs

Exemples concrets

développement asymptotique de la série harmonique

DEV 1

Séries entières → outil pour la calcul de série

DEV 2