

[R] [G]

[R]

229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

I-Fonctions monotones

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

1) Définitions et premières propriétés [R] 287

- def
- injective si strict monotone
- stabilité λf $f+g$
- $f \nearrow$ si $1/f \searrow$

2) Régularité [R] 289-300

- limite à gauche et à droite
- pt de discontinuité
- $f \in C^0 \Leftrightarrow f(I)$ intervalle $\Leftrightarrow$ TVI
- Th homéomorphisme
- lien avec dérivée et $\nearrow \searrow$
- ex sinus

3) Suites et séries [R] 304 [G] 212

- Th Dini
- Comparaison série $\sum$
- Série Harmonique

4) Cas particulier dans $\mathbb{R}^n$ [G] 350

DEV1

- Th

II-Fonctions convexes

1) Généralités [R] 343-344

- def + ex e^x
- lien avec graphe

- CL composition
- CE pour produit

2) Régularité des fonctions convexes

- convexe sur $I \Rightarrow C^0$ sur $I^\circ \neq \emptyset$
- Th des 3 pentes
- affine si convexe et concave
- cr si convexe majorée
- $f'(x) = c$ + convexe $\Rightarrow$ minimum
- convexe si $f'(x) \geq 0$
- ex f
- Th f par lg convexité

DEV2

III - Inégalités de convexité [R1] 39 [R3] 120

- $e^x \geq x+1$
- $\ln(x) \leq x-1$
- Young
- Hölder
- Minkowsky

$$\sin x \leq x$$

$$[G] 97$$

229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

I - Fonctions monotones

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1: On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) si $\forall x < y \in I, f(x) \leq f(y)$ (resp. $\forall x < y \in I, f(x) < f(y)$)

On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x < y \in I, f(x) \geq f(y)$ (resp. $\forall x < y \in I, f(x) > f(y)$)

On dit que f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 2: Une fonction monotone est injective si et seulement si, elle est strictement monotone.

Proposition 3: Soit f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$

- 1) si f croissante et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors λf est croissante.
- 2) si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante
- 3) si f et g sont croissantes et positives, alors fg est croissante.

4) si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ croissante $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$ sont croissantes. Alors $g \circ f$ croissante

5) si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ croissante $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$ sont décroissantes. Alors $g \circ f$ croissante.

Proposition 4: $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante si, et seulement si $\frac{1}{f}$ est décroissante.

2) Régularité

Théorème 5: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone, elle admet alors une limite à gauche et à droite en tout point de I . Pour f croissante, on a $\forall x \in I \quad f(x^-) = \sup_{t \in I, t < x} f(t) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{t \in I, t > x} f(t)$

Théorème 6: L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable

Théorème 7: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) f continue
- 2) $f(I)$ est un intervalle
- 3) f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 8: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f est un homéomorphisme de I sur J

Théorème 9: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur I .

- Alors: 1) f est constante si $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$
- 2) f est croissante si $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- 3) f est décroissante si $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$

Exemple 10: L'application sinus induit un homéomorphisme de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

3) Suites et séries

Théorème 11: (Dini) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues et croissantes (resp. décroissantes) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $[a, b]$ vers

[C]
212

une fonction continue g , la convergence est alors uniforme

Proposition 12: (comparaison série-intégrale) Soit $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la série $\sum g(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ sont de même nature.

Application 13: $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = h(n) + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler

4) Cas particulier dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 14: Soit $\mathbb{R}^n$, l'espace euclidien de dimension n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle \rightarrow$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Une application $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$, tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ $\langle g(x) - g(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$ (*)

On a alors

1) $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
 $\langle Dg(x)h, h \rangle \geq k \|h\|^2$
 vérifie (*)

2) Si $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 alors g est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ vérifie (*)

DEV1

II- Fonctions convexes

1) Généralités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 15: On dit que g est convexe si $\forall (x, y) \in I^2$

$$\forall t \in [0, 1] \quad g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y).$$

g est strictement convexe si $\forall (x, y) \in I^2$ $x \neq y$ l'inégalité est stricte.

On dit que g est concave (resp strictement concave) si $-g$ est convexe (resp strictement convexe).

Exemple 16: $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Théorème 17: La fonction g est convexe si $\forall (A, B)$ du graphe de g où $A = (a, g(a))$, $B = (b, g(b))$ avec $a < b$ dans I , la courbe représentative de $g|_{[a, b]}$ est en dessous de la corde $[AB]$.

Proposition 18: 1) Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

2) La composée $g \circ \varphi$ d'une fonction convexe croissante $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec une fonction convexe $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

3) Une limite simple de fonctions convexes est convexe

Contre-exemple 19: le produit de 2 fonctions n'est pas forcément convexe: $x \mapsto x^3$

2) Régularité des fonctions convexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$

Théorème 20: Si g est convexe sur I , g est continue sur I

Contre-exemple 21: $g: x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$ pas continue

350

344

[R]
313

Théorème 22: On a équivalence entre:

1) f est convexe

$$2) \forall x < y < z, \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

3) $\forall a \in I, \quad \text{La: } x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

Corollaire 23: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est affine si elle est convexe et concave.

Corollaire 24: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si elle est convexe et majorée

Théorème 25: Si f est convexe sur I et dérivable en $\alpha \in I$ et que $f'(\alpha) = 0$, alors f admet un minimum global en α .

Théorème 26: Si f est convexe sur I et admet un minimum local en $\alpha \in I$, alors ce minimum est global

Théorème 27: Si f est deux fois dérivable sur I , f est convexe sur I si $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Exemple 28: La fonction Γ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convexe

Théorème 29: Soit F l'ensemble des applications

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant:

$$1) f(1) = 1$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) = n f(n)$$

3) $f_n(f)$ est convexe

Alors $F = \{\Gamma\}$

III - Inégalités de convexité

Exemple 30: $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\bullet h(x) \leq x-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\bullet \sin(x) \leq x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Proposition 31: (Inégalité de Young) Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

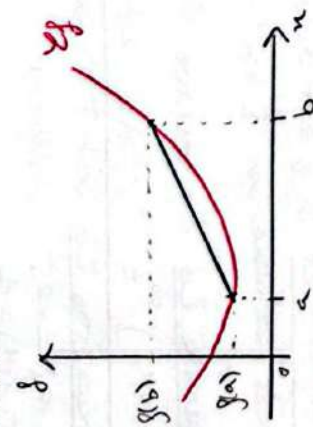
$$\text{Alors } \forall u, v \in \mathbb{R}_+^* \quad uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$$

Théorème 32: (Inégalité de Hölder) Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\forall a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ on a $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$

Théorème 33: (Inégalité de Minkowski) Soient $p \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des nombres réels positifs.

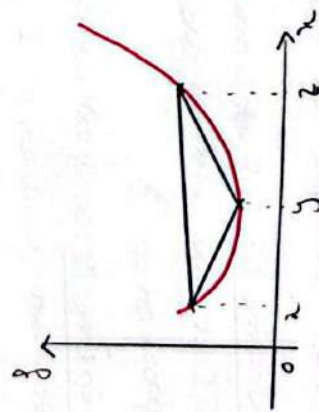
$$\text{Alors } \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Annexe



[6] 36

Courbe d'une
fonction convexe
en dessous de
des cordes



[6] 36

Inégalité des
trois points

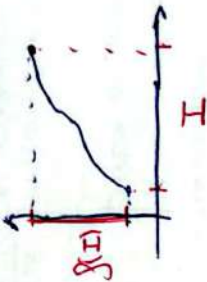
$\hat{f} g \Rightarrow -g \uparrow$ on se
réfère à l'étude des $g \uparrow$

Fct monotone

- croissante ou décroissante
- stable par CL positive

régularité? →

- existence $\lim$ à droite et à gauche
- $\hookrightarrow$ pt de discontinuité dénombrable

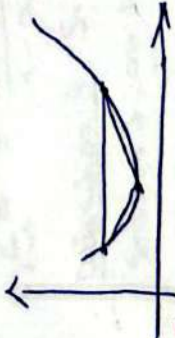


• TVI

229: fonction monotones
fonctions convexes. Exemples
et applications

Pour une $g \uparrow$
convexe, sa $\hat{f}$ (lien)
dérivée à
droite et à
gauche est
monotone.

Fonctions convexes



g convexe sur $I \Rightarrow g \in C''$ sur $\hat{I} \Delta$

Intégralité des 3 parties

Lien avec dérivées
on obtient des min

→ si $g \in C''$ g convexe ssi $g' \geq 0$



ex e^x

Utilité dans l'étude des séries

$\hookrightarrow$ comparaison série intégrale → série harmonique

Th: caractérisation
de Γ par log convexité

(DEV2)

exemple fonction Γ



Generalisation dans $\mathbb{R}^n$?

Th qui donne des
 C^1 -différentiables (DEV2)

Inégalité de convexité

Young Holder Minkowski

- lien avec dérivées
- $g' \geq 0 \Leftrightarrow \uparrow$
- $g' \leq 0 \Leftrightarrow \downarrow$



on obtient des
isomorphismes
comme $\sin$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$