

[TL1]
[TL2]
G

228: Continuité, dérivabilité des fonctions réelles, d'une variable réelle, Exemples et applications

I et J intervalles de $\mathbb{R}$

I-Continuité

1) Généralités

[TL1] 631-633

TL2 489

- def continue en a et sur I
- ex: $\sin x$ pas continue $x \mapsto \sin x$ se prolonge par continuité
- def unif continue et L-Lipschitz
- Prop Lipschitz $\Rightarrow$ unif continue $\Rightarrow C^0$
- Th continuité de $f+g$, fg , λf , $\frac{f}{g}$
- Th continuité composée
- ex: polynômes, sup, max, inf, min

△ connaître
ces
résultats

2) Sur un intervalle [TL1] 634-637

- TVI
- Coro: $f \in C^0$ sur I $\Rightarrow f(I)$ intervalle

3) Sur un compact [TL1] 638 [G3] 235

- Th: continue sur un segment $\Rightarrow$ bornée et atteint ses bornes
- Th de Heine
- Th de Weierstrass

DEV1

II-Dérivabilité

1) Généralités

[TL1] 640-642

[G] 73

- def
- ex: $|x|$ dérivable à gauche et droite mais pas en 0
- Prop dérivable en a $\Rightarrow C^0$ en a
- Rq: une dérivée n'est pas forcément continue
- ex: $f(0)=0$
 $f(x)=x^2 \sin(\frac{1}{x})$ $x \neq 0$
- Th $f+g$, fg , $\frac{f}{g}$ dérivables

• Dérivée de la composée

2) sens de variation et extremas [TL1] 647

• $f \nearrow \Rightarrow f'(a) \geq 0$

• extremum local si $f'(a) = 0$

3) Th de Rolle et accroissement finis [TL1] 648-650 [TL1] 683

• Th de Rolle

• TAF

• $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$

• Th fondamental de l'analyse

• IAF + ex cos et sin

4) Formules de Taylor [TL1] 644 652

• def classe C^n

• Taylor Lagrange et Young

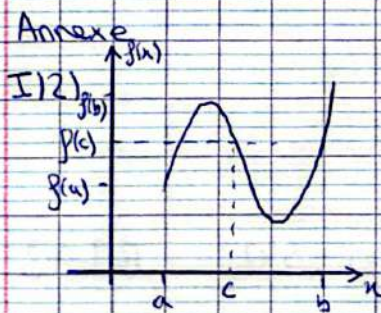
III- Étude de la Fonction Gamma 162 [G] 295

• Th Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale

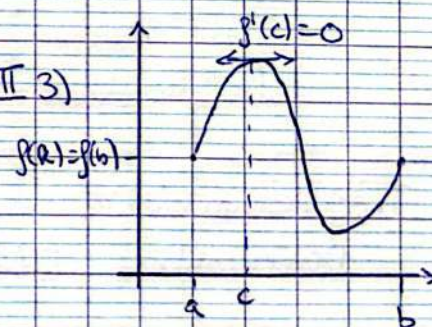
• la fonction Γ

DEV2

TVI

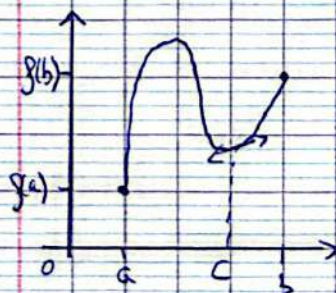


II) 3)



Rolle

TAF



228: Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

On considère I et J des intervalles de $\mathbb{R}$

I-Continuité

1) Généralités

Définition 1: Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue:

- en $a \in I$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- sur I si elle est continue en tout point $a \in I$

Exemple 2: • 1_a n'est continue nulle part

- $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par 1

Définition 3: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est:

- uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- L -lipschitzienne si $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

Proposition 4: f lipschitzienne $\Rightarrow f$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue (connaitre CE)

Théorème 5: Soient f et g continues en $a \in I$, alors $f+g, f-g, fg$ sont continues en a , ainsi que $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

Théorème 6: Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $f(a)$. On suppose $g(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est continue en a .

Exemples 7: 1) Toute fonction polynômiale est continue

- 2) Pour $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $a \in I, |f|$ est continue en a
- 3) Pour $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues en $a \in I$, les fonctions suivantes sont continues en a :
 $\sup\{f, g\}: x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $\inf\{f, g\}: x \mapsto \min(f(x), g(x))$

2) Sur un intervalle

Théorème 8: (Des valeurs intermédiaires) Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors $\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$

Remarque 9: Si f strictement monotone sur $[a, b]$, il existe une unique solution.

Corollaire 10: Si f continue sur $I, f(I)$ est un intervalle

Exemple 11: $\sin:]-\pi, \pi[= [-1, 1]$

Théorème 12: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue injective. Alors f est strictement monotone et réalise un homéomorphisme sur $J = f(I)$

3) Sur un compact

Théorème 13: 1) Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes
 2) L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment.

Théorème 14: (Heine) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.

[G] 235
Théorème 15: Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite uniforme d'une suite de polynômes (DEVI)

II - Dérivabilité

1) Généralités

[T1] 640
Définition 16: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable:
• en $a \in I$ si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe. Lorsque c'est le cas, on le note $f'(a)$.

• à gauche (resp à droite) en a si $\lim_{t \rightarrow a^-} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ (resp $\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$) existe. On le note $f'_g(a)$ (resp $f'_d(a)$).
• Sur I si elle est dérivable en tout point $a \in I$. On note f' sa dérivée.

641
Proposition 17: Soit $a \in \mathbb{I}$. Pour que f soit dérivable en a , il faut et suffit que f soit dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 18: $x \mapsto |x|$ pas dérivable en 0.

Proposition 19: Toute fonction dérivable en a est continue en a .

642
Théorème 20: Si f et g sont dérivables en a , alors $f+g$, $f-g$ et λg sont dérivables en a , ainsi que f/g si $g(a) \neq 0$.
 $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
 $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
 $(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a)$

Théorème 21: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$

dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

[G] 643
Théorème 22: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement monotone sur I . Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $f'^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

2) Sens de variation et extremas

[T1] 647
Proposition 23: Si f est croissante sur I et dérivable en $a \in I$, alors $f'(a) \geq 0$. Si f est décroissante sur I , alors $f'(a) \leq 0$

Proposition 24: Soit f dérivable sur I ouvert. Si elle admet un extremum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$

Remarque 25: $f: x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local

3) Théorèmes de Rolle et accroissements finis

648
Théorème²⁶ (Rolle): Soit f continue sur $[a, b]$, $a < b$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 27 (Accroissements finis): Soit f continue sur $[a, b]$, $a < b$, dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Proposition 28: Soit f continue sur I , dérivable sur I

- 1) Si $g'(x) \geq 0 \forall x \in I$, alors g croissante sur I
- 2) Si $g'(x) \leq 0 \forall x \in I$, alors g décroissante sur I
- 3) Si $g'(x) > 0 \forall x \in I$, alors g strictement croissante sur I
- 4) g est constante sur I ssi $g'(x) = 0 \forall x \in I$

Théorème 29: (Fondamental de l'analyse) Soit g continue sur I et $x_0 \in I$, alors $F: x \mapsto \int_{x_0}^x g(t) dt$ est dérivable sur I de dérivée g .

Corollaire 30: (Intégrale des accroissements finis) Soit g dérivable sur I telle que $\exists M > 0$ avec $|g'(x)| \leq M \forall x \in I$. Alors g est M -lipschitzienne sur I

Exemple 31: cos et sin sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$

4) Formules de Taylor

Définition 32: Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, on définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la fonction dérivée d'ordre n de g sur I par $g^{(0)} = g$ et si $g^{(n-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ connue, on dit que g admet une dérivée d'ordre n sur I si $g^{(n-1)}$ est dérivable sur I . On note $g^{(n)} = (g^{(n-1)})'$

Définition 33: $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si elle admet une dérivée d'ordre n qui est continue sur I . Elle est de classe C^∞ si elle est de classe $C^n \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 34: (Taylor Lagrange) Soit $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a, b]$ telle que $g^{(n+1)}$ existe

sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[$ telle que:
 $g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} g^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(c)$

Théorème 35: (Taylor-Young) Soient $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ telle que g est n fois dérivable en a . Alors lorsque $h \rightarrow 0$:
 $g(a+h) = g(a) + h g'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(a) + o(h^n)$

III - Etude de la Fonction Gamma

Théorème 36: Soit $g: x \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto g(x, t)$ telle que: 1) $\forall x \in x, t \mapsto g(x, t)$ intégrable sur I 2) $\forall t \in I, x \mapsto g(x, t)$ dérivable sur x et il existe φ intégrable positive telle que $|g(x, t)| \leq \varphi(t) \forall x \in x$
 Alors $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \int_I g(x, t) dt$ est C^1 sur x et
 $\phi'(x) = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$

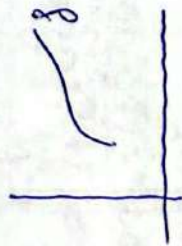
Définition 37: Pour $x > 0, y > 0$ on définit:
 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ (Gamma) et $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ (Beta)

Théorème 38: On a alors:
 1) Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$
 2) Γ et $\log(\Gamma)$ sont convexes sur $\mathbb{R}^+$
 3) $\forall n > 0, \Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$
 4) $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$
 5) $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^{x-1} \Gamma(n)}$

Qu'est-ce que la régularité?

Continuité

lycée $\rightarrow$ tracer sans lever le stylo



université $\rightarrow$

def + abstraite avec les quantificateurs
ex: e^x , $\cos x$, $\sin x$...

Summe
produit
composée continue

$\hookrightarrow$ parfois on a presque la continuité et on peut prolonger par continuité
ex: $\frac{\sin t}{t}$

228: Continuité, dérivabilité des

fonctions réelles, d'une variable réelle
Exemples et applications

~~X~~ ex 141 $\uparrow$

Dérivabilité

lycée $\rightarrow$ taux d'accroissement
 $\rightarrow$ pente de la tangente

$\hookrightarrow$ utile pour étudier sens de variation
 $\hookrightarrow$ extremum de f $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

~~X~~ ex $f(x) = x^3$

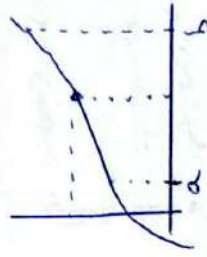
$\rightarrow$ Rolle: savoir si dérivée s'annule entre 2 points



cas des fonctions de classe C^n

Formules de Taylor

Théorème important TVI



une f est C^0 sur un intervalle ne s'annule aucune valeur entre 2 images

$C^0 \Rightarrow$ définition de continuité

solutions de $f(x) = c$

sur des compacts $\rightarrow$ max, min, Th Heine
 $\rightarrow$ on peut approcher les fonctions continues par des polynômes

DEV 1: Weierstrass

Etude de $f'(x)$
DEV 2