

[G]
[ELA]
[Rouv]

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ Exemples.
Application à la résolution approchée d'équations

I- Suites récurrentes

1) Définition (et premières propriétés) [G] 200 [ELA] 40
206 -42

- def + ex
- def cv géométrique, arith, quadratique + ex

2) Suites à valeurs réelles [G] 201

- def arithmétique + prop
- suite géométrique + prop
- suite arithmético géométrique + prop

3) Suites récurrentes linéaires [G] 202 [ELA] 42

- def
- $u_{n+1} = Au_n$
- équation caractéristique
- Suite de Fibonacci

II- Outils pour étudier les suites récurrentes

1) Stabilité [ELA] 38 [G] 200

- caractérisation séquentielle
- $u_n \rightarrow l \Rightarrow l = f(l)$
- ex
- prop monotonie + ex

2) Développement asymptotique [ELA]

- moyenne de Cesaro
- cv Cesaro + ex
- $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

DEVL

III - Application à la résolution approchée d'équation

1) Théorème du point fixe [Rouv] 139

- Th
- App CL linéaire
- pt fixe attractif et repulsif
- POP
- ex ab d'or

2) Méthode de Newton [Rouv] 142-145

- méthode de Newton
- ex

226: Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

I- Suites récurrentes

1) Définition et premières propriétés

Définition 1: Soient (E, d) un espace métrique et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une suite récurrente (d'ordre 1) lorsque $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f: E \rightarrow E$.

Exemple 2: Soit (u_n) telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

Définition 3: On dit que (u_n) converge:

* géométriquement vers 0 si elle est dominée par une suite géométrique (k^n) avec $0 < k < 1$.

* lentement vers 0 si elle est minorée par une suite du type $\frac{A}{n^k}$ avec $A, k \in \mathbb{R}^+$.

* quadratique si elle est dominée par (k^{2n}) où $0 < k < 1$.

Exemple 4: $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ Alors $u_n \rightarrow 0$ lentement.

2) Suites à valeurs réelles.

Définition 5: On appelle suite arithmétique, une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = u_n + a$ où $a \in E$.

Proposition 6: On a alors $u_n = u_0 + na \quad \forall n \in \mathbb{N}$. a est appelé la raison.

Définition 6: On appelle suite géométrique, une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = q u_n$. où $q \in E$ est appelé la raison de la suite.

Proposition 7: On a alors $u_n = q^n u_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et si $|q| > 1$ la suite diverge, si $|q| < 1$, elle converge et si $q = 1$, elle est constante.

Définition 8: On appelle suite arithmético-géométrique, les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = q u_n + a$.

Proposition 8: On a alors: si $q = 1$ on a une suite arithmétique et si $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = q^n (u_0 - r) + r$ avec $r = \frac{a}{1-q}$.

3) Suites récurrentes linéaires

Définition 9: On dit qu'une suite (u_n) à valeurs complexes vérifie une récurrence linéaire (homogène) d'ordre k à coefficients constants si $\forall n \geq k$

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k} \quad (a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}) \quad (*)$$

Remarque 10: On peut alors se ramener à une suite du type $u_{n+1} = A u_n$ avec $(u_n) \in (\mathbb{C}^k)^{\mathbb{N}}$

Proposition 11: L'équation $x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0$ s'appelle équation caractéristique de (*). Si on note $r_1, \dots, r_k$ ses racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ leur ordre de multiplicité respectifs, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant (*) est l'ensemble des suites de la forme $u_n = p_1(n) r_1^n + \dots + p_k(n) r_k^n$ où p_i polynôme degré $(i-1)$. Soit



[EUA] Exemple 12: (Suite de Fibonacci) Soit F_n définie par $F_0=0$,

47 $F_1=1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

Alors $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

II- Outils pour étudier les suites récurrentes.

1) Stabilité

38 Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 13: Soit $\ell \in I$. Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au point ℓ ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de I convergent vers ℓ , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Corollaire 14: Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers ℓ , $\ell \in I$, alors nécessairement $\ell = f(\ell)$.

Exemple 15: La suite (u_n) définie par $u_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ converge vers 0.

Proposition 16: 1) Si f est croissante, alors (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.

2) Si f est décroissante, alors (u_n) et (u_{n+1}) sont monotones et leur sens de monotonie est opposé.

Exemple 17: La suite de l'exemple 16 est décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$ et croissante si $u_1 - u_0 \geq 0$.

2) Développement asymptotique

Définition 18: A toute suite (u_n) on y associe sa suite (v_n) des moyennes de Cesaro où

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 19: Si u_n converge vers un nombre complexe ℓ , alors (v_n) converge vers ℓ . On dit que (u_n) converge au sens de Cesaro.

Exemple 20: Si $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall n, u_{n+1} = \sin(u_n)$

$$\text{Alors } u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\log(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

Exemple 21: Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

On a 1) $u_n \sim \sqrt{2n}$ 2) $\sin u_0 = 5, u_{1000} \in [4, 5, 4, 5]$

III- Application à la résolution approchée d'équation

1) Théorème du point fixe

Théorème 22: (du point fixe) Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $f: E \rightarrow E$ application k -contractante avec $0 \leq k < 1$, alors:

1) f admet un unique point fixe

2) $\forall x_0 \in E$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifie $d(u_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u_0)$

Application 23: (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, E un espace de Banach.

$A: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue, $b: I \rightarrow E$ continue, $t_0 \in I$

$x_0 \in E$. Alors $\exists! \gamma \in C^1(I, E)$ tel que

$$\begin{cases} \forall t \in I, \gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + b(t) \\ \gamma(t_0) = x_0 \end{cases}$$

[Rem] Définition 24: Soit I intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi: I \rightarrow I$ application de classe C^1 . Soit $a \in I$ point fixe de φ .

• Si $|\varphi'(a)| < 1$, on dit que a est attractif

• Si $|\varphi'(a)| > 1$, on dit que a est repulsif

Proposition 25:

pour $\varphi: I \rightarrow I$

• Si $a \in I$ est attractif, alors la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $x_0 \in I$ vérifie: $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq |x_0 - a|$ et converge géométriquement.

• Si $a \in I$ est repulsif pour $\varphi: I \rightarrow I$, $\exists J \subset I$ fermé centré en a tel que pour $x_0 \in J, x_0 \neq a$, (x_n) sort de J .

Exemple 25: le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le point fixe de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur $J = [0, +\infty[$.

2) Méthode de Newton

Théorème 27: (Méthode de Newton) Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de classe C^2 strictement croissante sur $[c, d]$

On considère $\varphi: x \in [c, d] \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in \mathbb{R}$

Alors: i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$

ii) $\exists \alpha > 0$ tq $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ stable par φ

iii) la suite définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $\forall n \geq 0$ converge quadratiquement vers a $\forall x_0 \in I$.

Exemple 28: Soit $y > 0$ et $f(x) = x^2 - y$

Pour $a = \sqrt{y}$, on a une estimation de l'erreur

$$0 < x_n - a \leq 2a \left(\frac{x_0 - a}{2a} \right)^{2^n} \quad \text{où } x_n = f(x_0)$$

$$\text{et } f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right).$$

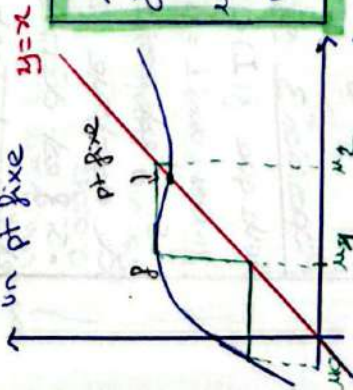
→ Modélisation du système

évaluer en fonction de ses états précédents.

(évolution des populations...)

utile pour estimer des nb. $\sqrt{2}$ (Heron)

limite est un pt fixe



226: Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

→ cv géométrique

→ cv linéaire

→ cv quadratique

$u_n = u_0 + na$ à valeur réelles

$$u_n = u_0 q^n$$

$$u_n = q^n (u_0 - r) + r$$

$$u_{n+1} = A u_n$$

on peut tjrs se ramener au

$$\text{cas } u_{n+1} = f(u_n)$$

→ équations caractéristiques

L: Fibonacci

OUTILS

f et c^*

→ caractéristique séquentielle

$$u_{n+1} = f \rightarrow f = f(e)$$

→ monotonie de u_n

développement asymptotique

$$\text{ex: } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

DEV 1

Résolution d'équation

pt fixe

DEV 2

CL linéaire EDO

Méthode de Newton

$$f(x) = 0$$