

[TL1]
[G]
[Roww]
[GK]
[FraA1]

224. Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

I- Comparaison de suites^{et} de fonctions

E un evn sur $\mathbb{R}$

1) Relation de comparaison [TL1] 861-869

- def équivalente, négligeable, dominée
- ex

2) Développement limité [G] 89 77 91

- def
- unicité
- Taylor-Young
- ex

3) développement asymptotique [G] 88

- def échelle comparaison
- def + unicité

II- Exemples de développements asymptotiques

1) Séries numériques [G] 212

- comparaison série intégrale
- série Harmonique
- série Riemann

DEV1

2) Suites récurrentes [TL1] 542 [G] 281 228

- def moyenne césaro
- cv au sens de césaro
- suite définie par récurrence [FraA1]
- corollaire
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

[Roww] 152

DEV2

- Methode de Newton
- Stirling

II - Exemples de développements asymptotiques de fonctions

1) Fonctions définies par la somme d'une série [GK]

- TCL
- Stirling

307
556

2) Fonctions définies par une intégrale [G] 163

- Th comparaison
- ex $\ln(n)$
- Fct gamma

295

Autres Taylor

224: Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

I-Comparaison de suites et de fonctions

Soit E un e.v.n sur $\mathbb{R}$

1) Relation de comparaison

Définition 1: Soient f et g deux fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$, g ne s'annulant pas au voisinage de $a \in I$ sans peut-être en a .

1) On dit que f et g sont équivalentes en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{ on note } f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$$

2) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on note $f(x) = o(g(x))$

3) On dit que f est dominée par g au voisinage de a si f/g bornée au voisinage de a .

On note $f(x) = O(g(x))$

Exemples 2: $e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x$ • $\ln(x) = o(x^2)$ $x \rightarrow +\infty$

2) Développement limité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $o \in I$.

Définition 3: On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $a_0, \dots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de o ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Proposition 4: Si f admet un développement limité, alors il est unique.

Si f est paire, $a_k = 0 \quad \forall k$ impair

Si f est impaire, $a_k = 0 \quad \forall k$ pair.

Proposition 5: Si f est n fois dérivable en o , alors f admet au voisinage de o le DL d'ordre n suivant

$$f(x) = f(o) + f'(o)x + \dots + \frac{f^{(n)}(o)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Théorème 6: (Formule de Taylor Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur I . Soit $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \rightarrow 0$ on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

Proposition 7: Si f est n fois dérivable en o , alors

f admet un développement limité à l'ordre n en o .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(o)}{k!} x^k + o(x^{n+1})$$

Exemples 8:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \bullet \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x)^x = 1 + \frac{x}{1!} x + \frac{x(x-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{m!} x^m + o(x^m)$$

3) Developpement asymptotique

Definition 9: Soit X un espace métrique et $x_0 \in X$. On appelle échelle de comparaison un ensemble E de fonctions définies au voisinage de $x_0 \in X$ sauf éventuellement en x_0 et vérifiant: si $f, g \in E$, alors $f = g$ ou $f = o(g)$ ou $g = o(f)$.

Definition 10: Soit X un espace métrique. Soient $f: I \subset X \rightarrow E$ application, x_0 un point d'accumulation de I dans X et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle développement asymptotique à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison E au voisinage de x_0 toute expression de la forme

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k \text{ vérifiant:}$$

- 1) $c_1, \dots, c_k \in E$ sont des constantes multiplicatives.
 - 2) $f_1, \dots, f_k \in E$ avec $\forall i, f_{i+1}(x) = o(f_i(x))$ $x \rightarrow x_0$
 - 3) $f(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) + o(f_k(x))$ $x \rightarrow x_0$
- Si il existe, un tel développement est unique.

II-Exemples de développements asymptotiques

1) Séries numériques

Proposition 11: Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Alors la suite u_n définie par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(t) dt$$
 est convergente. $\forall n \in \mathbb{N}$ la série $\sum f(n)$ et $\int_0^\infty f(t) dt$ ont la même nature.

Application 12: Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}^*$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Application 13: (Série de Bertrand)

la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log n}$ convergessi $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$

2) Suites récurrentes

Definition 14: À toute suite numérique (u_n) on associe sa suite (v_n) des moyennes de Césaro où $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$

Théorème 15: Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors sa suite des moyennes de Césaro converge vers l . On dit que (u_n) converge au sens de Césaro.

Proposition 16: Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

Alors on a: 1) $u_n \sim \sqrt{2n}$

2) Si $u_0 = 5$ $u_{1000} \in [45, 45, 1]$

Corollaire 17: On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie

par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}$ ($\alpha > 1$)

Alors $u_n \sim (n(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}$

[G]
228

Proposition 18: Soit (u_n) suite vérifiant
 $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sin u_n$

$$\text{On a } u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\log(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log n}{n\sqrt{n}}\right)$$

[Rou]
152

Théorème 19. (Méthode de Newton) Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de classe C^2 strictement croissante sur $[c, d]$. On considère $\varphi: x \in [c, d] \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in \mathbb{R}$. Alors

- 1) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$
- 2) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ
- 3) La suite (u_n) des itérés $(x_{n+1} = \varphi(x_n))$ converge quadratiquement vers a $\forall x_0 \in I$.

III - Exemples de développements asymptotiques de fonctions

1) Fonctions définies par la somme d'une série.

Formules de Taylor

Théorème 20 (TCL) Soit $(X_n)_n$ suite de v.a iid admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance de X_1 . On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

$$\text{Alors } \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Application 21 (Formule de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

556

2) Fonctions définies par une intégrale

Théorème 22: Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow E$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur $[a, b]$.

- 1) Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge alors quand $x \rightarrow b^-$
 - si $f(t) = O(g(t))$, $\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$
 - si $f(t) = o(g(t))$, $\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$
 - si $f(t) \sim g(t)$ alors, $\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$
- 2) Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors quand $x \rightarrow a^+$
 - si $f(t) = O(g(t))$, alors $\int_x^b f(t) dt = O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$
 - si $f(t) = o(g(t))$, alors $\int_x^b f(t) dt = o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$
 - si $f(t) \sim g(t)$ alors $\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$

Exemple 23: Lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = o\left(\int_1^x t^{-\alpha} dt\right) = o(x^{-\alpha})$$

Proposition 24: La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ vérifie

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- 2) $\Gamma(1) = 1$
- 3) Γ est log convexe sur $\mathbb{R}^+$
- 4) $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x-2}$
- 5) $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^x (n-1)!}$

[GK]
307

- approcher des fct par des fct + simples
- comprendre des comportements en un point ou à l'infini.
- comparer avec des fct usuelles ex: n^n

Relations de comparaison

$f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
 $f = o(g) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
 $f = O(g) \iff \frac{f}{g} \text{ bornée}$

comparaison

Notion de DL avec Taylor-Young

gC^n

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k + o(x^{n+1})$$

→ DL usuels pour fct classiques $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^x, \dots$

$e^x - 1 \sim x$

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et fonctions

Méthode de optimisation Newton

$u_{n+1} = g(u_n)$

suites récurrentes

Cesaro + cv Cesaro

étude de

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ DEV2

borné par une intégrale

$\Gamma(x)$

Fonctions

cas continue

somme d'une série

TCL

Stronging

Développement asymptotique

→ échelle de comparaison

→ unique

Série numérique → Comparaison série

Série de Bertrand

$\sum \frac{1}{n^2 n^{\epsilon} \log n}$

Exemple célèbre

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

diverge mais de quelle façon?

DEV1