

[Ber]

[G]

[ELA]

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications

I- Théorie des équations différentielles linéaires

1) Généralités [Ber] 11-12-13 21

- def equation
- def solution
- def pb de Cauchy + ex
- def equation linéaire + homogène
- Prop solution
- équivalence à l'ordre 1

2) Structure des solutions 25 30 34-35

- Th CL linéaire
- (L) (LH) SH S
- exemple

3) Matrice fondamentale et wronskien 40 44

- def + ex
- prop matrice fondamentale
- Identité d'Abel

II- Méthode de résolution

1) Cas constant homogène 45-47 50

- def exp matrice
- propriétés
- solutions
- ex

2) Variation de la cst 54 [G] 381

- méthode

DEV

- Formule de DuRamel
- ex : $y' + y = \sin t$
- Intégrale de Gauss

3) Utilisation des séries [ELA] 246

- méthode
- équation de Bessel

III - Portrait de phase en dimension 2 [Ber] 209

- $Y' = AY$
- étude avec les vp + figures

221: Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times (K^n)$.
I-Théorie des équations différentielles linéaires.

1) Généralités

Définition 1: Soit $f: \Omega \rightarrow K^n$. On appelle équation différentielle d'ordre n l'équation:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \text{ pour } (t, y, \dots, y^{(n-1)}) \in \Omega \quad (E_n)$$

Définition 2: Une solution de (E_n) est un couple (I, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y: I \rightarrow K^n$ n fois dérivable vérifiant (E_n) .

Remarque 3: Si $n=1$, c'est le cas fondamental:

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in \Omega \quad (E)$$

Définition 4: Le problème de Cauchy avec données initiales (t_0, y_0) consiste à trouver les solutions y de (E) sur I telles que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Exemple 5: $y: t \in \mathbb{R} \mapsto 2e^t$ est solution de $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Définition 6: On dit que $y' = f(t, y)$ est une équation différentielle linéaire si $f(t, y(t)) = A(t)y(t) + B(t+1)$ où $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(K)$ et $B: \mathbb{R} \rightarrow K^n$.

Définition 7: Dans le cas d'une EDO linéaire, si $B \equiv 0$, on parle d'EDO homogène.

Proposition 8: Soit $f: \Omega \rightarrow K^n$ continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Une fonction $y: I \rightarrow K^n$ est solution de $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

ssi: 1) y est continue

2) $\forall t \in I \quad (t, y(t)) \in \Omega$

3) $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in I$

Proposition 9: En considérant $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, l'EDO (E_n) est équivalente à l'EDO $Y' = F(t, Y)$ d'ordre 1.

2) Structure des solutions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère:

$$y' = A(t)y + B(t) \quad (t, y) \in I \times K^n \quad (L)$$

$$\text{et } y' = A(t)y \quad (t, y) \in I \times K^n \quad (L_H)$$

Théorème 10: (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient $A \in C^0(I, M_n(K))$, $B \in C^0(I, K^n)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^n$. Alors il existe une unique solution $y: I \rightarrow K^n$ de (L) telle que $y(t_0) = y_0$.

Notation 11: Soit S l'ensemble des solutions de (L) et S_H l'ensemble des solutions de (L_H) .

Proposition 12: Soit $A \in C^0(I, M_n(K))$. Alors:

- 1) S_H est un sous-espace vectoriel de $C^0(I, K^n)$
- 2) $\forall t_0 \in I$, $\Phi_{t_0}: y \in S_H \mapsto y(t_0)$ isomorphisme d'ev.
- 3) S_H est de dimension n .



35 Corollaire 13: Soit $A \in C^0(I, M_N(K))$ et $B \in C^0(I, K^N)$.

S est un K -espace affine de direction S_H

Exemple 14: Les solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $e^{at} + bte^t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3) Matrice fondamentale et wronskien

40 Définition 15: Un système fondamental de solutions de (L_H) est une famille $(y_1, \dots, y_N)$ de N solutions indépendantes de (L_H) . La matrice $\Phi(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$ est appelée matrice fondamentale de (L_H) . Le déterminant de $\Phi(t)$ est appelé le wronskien, noté $w(t)$.

Exemple 16: Pour l'éqo de l'exemple 14, on a

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix} \text{ et } w(t) = e^{2t}.$$

Proposition 17: Soit $A \in C^0(I, M_N(K))$. Soit $\Phi \in C^0(I, M_N(K))$. Alors $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale pour (L_H) si et seulement si Φ est dérivable sur I

$$\begin{cases} \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) & \forall t \in I. \\ \Phi(t) \text{ inversible } \forall t \in I \end{cases}$$

Proposition 18: Soit $A \in C^0(I, M_N(K))$. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de (L_H) . Alors les solutions de (L_H) s'écrivent $y(t) = \Phi(t) \cdot C$ où $C \in K^N$ et $t \in I$.

44 Proposition 19: (Identité d'Abel) Soit $A \in C^0(I, M_N(K))$. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de (L_H) . Alors le wronskien $w(t)$ associée à $\Phi(t)$ vérifie:
 $w'(t) = w(t) e^{\int_0^t \text{tr}(A(s)) ds}$ et donc
 $w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds\right) \quad \forall t \in I$

II - Méthodes de résolution

1) Cas constant Résonance

Définition 20: Soit $A \in M_N(K)$, on définit son exponentielle 45 par $e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}$

Proposition 21: Soit $A, B \in M_N(K)$

- 1) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi(t) = e^{tA}$ est C^∞ et $\Phi'(t) = A e^{tA} = e^{tA} A$. 46
- 2) Si $AB = BA \quad e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$
- 3) e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Proposition 22: Soit $A \in M_N(K)$. Alors une matrice fondamentale 47 pour (L_H) est $\Phi(t) = e^{tA}$.

$y(t) = e^{tA} C$ avec $C \in K^N$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in K^N$, la solution de (L_H) telle que $y(t_0) = y_0$ est $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$

Exemple 23: Les solutions de $\begin{cases} x' = \lambda + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ sont de la 50 forme :

$$y(t) = \alpha \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} + \beta \frac{3e^t - e^{-t}}{2}$$

2) Variation de la constante

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $A \in C^0(I, M_N(K))$, $B \in C^0(I, K^N)$ 54

Méthode 24: On cherche à résoudre (2) si on connaît les solutions de (2_h). Les solutions de (2_h) s'écrivent $t \mapsto \phi(t)C$ avec $C \in \mathbb{K}^n$ et $\phi(t)$ la matrice fondamentale. On cherche des solutions de (2) sous la forme $y(t) = \phi(t)C(t)$. y est solution de (2) si $\phi(t)C'(t) = B(t)$. On effectue ensuite un calcul de primitive.

Proposition 25: (Formule de Duhamel) La solution de (2) telle que $y(t_0) = y_0$ est donnée par:

$$y(t) = \phi(t) \phi(t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^t \phi(t) \phi(s)^{-1} B(s) ds$$

où $\phi(t)$ est la matrice fondamentale de (2_h)

Exemple 26: Les solutions de $y' + y = \sin t$ sont de la forme $t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + \mu e^{-t}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$

Application 27: $\forall a > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Substitution des séries entières

Méthode 28: Pour résoudre une EDO linéaire, on peut essayer avec les séries entières:

- On suppose qu'une solution de l'EDO est développable en série entière
- On en déduit son développement grâce à l'EDO
- On montre que le rayon de convergence est non nul

Application 29: (Equation de Bessel) On considère l'équation différentielle:

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (E)$$

Alors il existe une unique solution

III - Portrait de phase en dimension 2

Étudions l'allure des trajectoires des solutions du système linéaire $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

ie $Y' = AY$ avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On suppose $\det(A) \neq 0$.

L'allure des trajectoires va dépendre de la nature des valeurs propres de A .

Soit λ, μ ses valeurs propres. $\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$

On note en, e_μ les vecteurs propres qui forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On a plusieurs cas:

- $\lambda \neq \mu$ de même signe: Figure 1a et 1b)
- $\lambda \neq \mu$ de signe opposé: Figure 2
- $\lambda = \mu$ et A diagonalisable: Figure 3a et 3b
- $\lambda = \mu$ et A non diagonalisable: Figure 4a et 4b
- λ et μ complexes: Figure 5.

Fig 1(a)

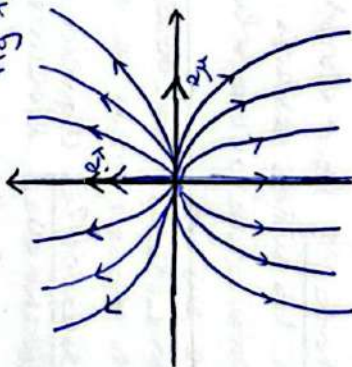


Fig 1(b)

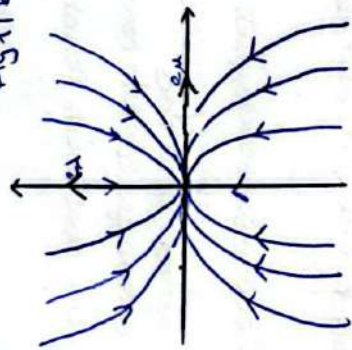


Fig 2

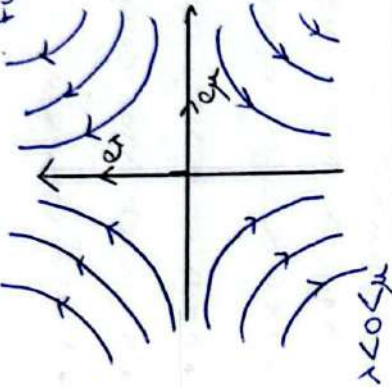


Fig 5)

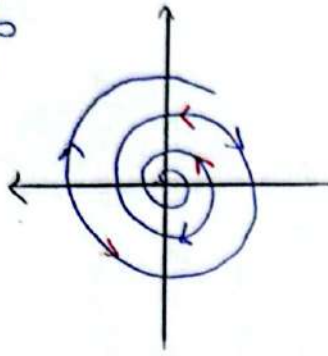


Fig 3(a)

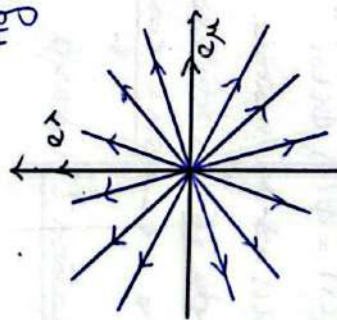


Fig 3(b)

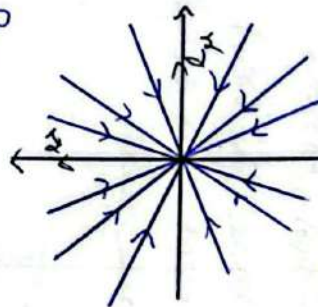


Fig 4(a)

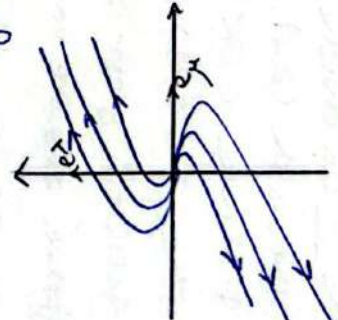
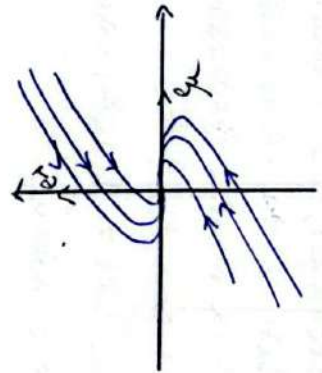


Fig 4(b)



→ cadre où l'on comprend l'existence, structure et calcul explicite des solutions

→ intervient dans de nombreux domaines : physique principalement.

→ modèle de base pour linéariser des systèmes non linéaires

Etude qualitative

Interprétation

→ solutions = trajectoires
 ↳ portrait de phase
 ↳ les VP structurant la dynamique

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

↳

$$y(t+1) = A(t)y(t) + B(t)$$

on se ramène toujours à l'ordre 1.

221: Equations différentielles linéaires.
 Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications

Méthodes de résolution

① Cas cste homogène : * exposants de matrice
 $y(t) = e^{tA} C$

② Variation de la cste

* on cherche une solution proche du second membre

↳ Formule de Duhamel

* Application : Calcul de l'intégrale de

Gauss avec EDO DEV2

③ Utilisation des séries entières

ex : équation de Bessel

Existence des solutions?

Th de CL linéaire qui utilise la notation pt fixe DEV2

+ unicité

structure de solutions
 → solutions de l'équation homogène (SOL)
 + solution particulière

⇒ ensemble des solutions =

Espace affine dirigé par l'espace des solutions homogènes

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

↳ Wronskien : on obtient l'ensemble des solutions linéairement indépendantes. Facilite l'étude.