

[Ber]
[G]

220: Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

I - Théorie des équations différentielles ordinaires

1) Def et cadre [Ber] 11-16 21

- def EDO
- se ramener à l'ordre 1
- Ex: $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$
- def prolongement
- def sol max et globale
- globale $\Rightarrow$ max max $\nRightarrow$ globale
- CE $y' = y^2$

2) Th de CL [Ber] 18 85 93 [G] 376

- Grönwall intégral
- CL local
- contre-exemple $f(y) = \sqrt{|y|}$
- CL local

3) Durée de vie et explosion des solutions [Ber]

- Sol de compact 111-112
- ex $y' = y^2$
- Explosion en temps finie
- bornée $\Rightarrow$ globale
- ex $y' = \sin(y)$ $y' = y^2$

II - Exemples et cas particuliers

1) Cas linéaire [Ber] 38 143

- CL linéaire
- méthode variation cste

DEV 1

- ex $y' + y = e^t$
- Intégrale de Gauss
- méthode séries entières
- équation de Bessel

2) Non linéaire [Ber] 138-139 (GJ 39)

- Bernoulli
- Ex
- Riccati

III - Étude qualitative des solutions

[Ber] 187 186 1) Points d'équilibre, isoclines, intégrale première
193 On pose (E) : $y' = f(y)$ un système autonome de $\mathbb{R}^2$
401-40 avec $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

- def pt d'équilibre et stabilité
- ex pendule
- def isocline
- def intégrale première
- ex

2) Étude de Lotka-Volterra et de son portrait de phase [Ber] 203

- def portrait de phase
- système Lotka-Volterra

DEV 2

220: Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

I - Théorie des équations différentielles ordinaires

1) Définitions et cadre

Définition 1: Soient $N, m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^N)^m$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}^N$.

On dit que $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (E_n)

pour $(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in \Omega, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{K}^N$.

est une équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$. La variable t est appelée variable temporelle et la variable y variable d'état.

Une solution de (E_n) est un couple (I, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une fonction n fois dérivable $y: I \rightarrow \mathbb{K}^N$ qui vérifie l'équation.

Proposition 2: En considérant $Y = {}^t(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$,
 $= {}^t(y, y', \dots, y^{(n-1)})$,

l'équation différentielle (E_n) d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$ est équivalente à l'équation différentielle (E₁) d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^{nN}$.

$$Y' = F(t, Y) \quad \text{avec} \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y) \end{pmatrix}$$

Exemple 3: L'équation différentielle $y' + y = 0$ avec la condition de Cauchy $y(0) = 2$ est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto 2e^{-t}$.

Définition 4: Soient $y_1: I_1 \rightarrow \mathbb{K}^N$ et $y_2: I_2 \rightarrow \mathbb{K}^N$ deux solutions de $y' = f(t, y)$ avec $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$. On dit que y_2 est un prolongement de y_1 si $I_1 \subset I_2$ et si $y_2|_{I_1} = y_1$.

Définition 5: On dit que y est une solution maximale si elle n'admet pas de prolongements stricts (c'est-à-dire pas d'autres prolongements qui l'élle-même).

• Dans le cas où $\Omega = I \times \mathbb{K}^N$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω' un ouvert de $\mathbb{K}^N$, une solution globale est une solution définie sur I tout entier.

Proposition 6: Une solution globale est maximale. La réciproque est fautive en général.

Contre exemple 7: Soit $y' = y^2$ avec donnée initiale $y(0) = y_0 > 0$.

La fonction $y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$ est une solution sur $] -\infty, \frac{1}{y_0}[$.

Or $t \mapsto y(t)$ tend vers $+\infty$ l'infini quand $t \rightarrow \frac{1}{y_0}$ donc ne peut pas admettre un prolongement continu. y_0 est donc une solution maximale qui n'est pas globale.

2) Théorème de Cauchy-Lipschitz

Lemme 8: (de Gronwall intégral)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in C(I, \mathbb{R})$. Supposons $u \geq 0$ et que, pour tout $t \in I$ tq $t \geq t_0$,
 $u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds$.

Alors, $\forall t \in I$ tq $t \geq t_0$, $u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right)$.

Théorème 9: (Cauchy-Lipschitz local)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}^N$ continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Alors il existe une unique solution maximale $y: I \rightarrow \mathbb{K}^N$ au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

De plus, l'intervalle I est ouvert.

[63]
376Contre exemple 10: Soit $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ avec $f(y) = \sqrt{|y|}$ $y(t) = 0$ et $y(t) = \frac{t^2}{4}$, $t \geq 0$ sont 2 solutions pour la même condition initiale. (car f n'est pas localement lipschitzienne)[64]
33Théorème 11: (Cauchy - Lipschitz global)Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable temps. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$. Alors il existe une unique solution globale $y: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.3) Durée de vie et explosion des solutionsThéorème 12: (Sortie de tout compact)Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $y:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^N$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Alors $(t, y(t))$ sort de tout compact de Ω quand $t \rightarrow d$, i.e. $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists V$ voisinage de d tel que $(t, y(t)) \notin K$ $\forall t \in V$ de même pour $t \rightarrow c$.Exemple 13: $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est solution de $y' = y^2$ et $(t, y(t))$ sort de tout compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ quand $t \rightarrow 1$.Théorème 14: (Explosion en temps fini)Soient $\Omega =]a, b[\times \mathbb{R}^N$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $y:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^N$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$ si $d < b$, alors $\|y(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow d} +\infty$, donc si $t \rightarrow y(t)$ bornée alors $d = b$.Remarque 15: Dans la pratique, on utilise la contraposition de ce résultat.Proposition 16: Soit $f:]a, b[\times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Si f est bornée, alors toute solution maximale de $y' = f(t, y)$ est globale.Exemple 17: $\begin{cases} y' = \sin(y) \\ y(1) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution maximale qui est globale. $\begin{cases} y' = y^4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution maximale qui n'est pas globale.II - Exemples et cas particuliers1) Cas linéaireThéorème 18: (Cauchy Lipschitz linéaire)Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, M_N(\mathbb{R}))$, $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$.Alors $\forall (t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale.Proposition 19: Dans le cas $N=1$, on a la méthode de la variation de la constante: on cherche les solutions sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{\psi(t)}$ avec $\lambda \in C^2(I)$ inconnue.Exemple 20: L'équation $\begin{cases} y' + y = e^t \\ y(1) = 0 \end{cases}$ a pour solution

$$y(t) = \frac{e^t - e}{2}$$

Exemple 21: On peut calculer l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ avec une équation différentielle linéaire avec la méthode du facteur intégrant.Méthode 22: (Séries arithmétiques)Pour résoudre l'équation $r(t)y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ on peut chercher les solutions sous la forme $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ sur $] -R, R[$ et utiliser l'équation pour

identifier les coefficients.

Théorème 23: (Equation de Bessel)

Soit l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ (E). On a

1) (E) admet des solutions développables en séries entières en 0 de la forme $g(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$

2) Soit g_0 solution développable en série entière en 0 avec $g_0(0) = 1$. Soit g une solution de (E) sur $]0, a[$ avec $a > 0$.

Alors (g, g_0) est libre ssi g n'est pas nulle au voisinage de 0

2) Non linéaire

Méthode 24: (Equation de Bernoulli) L'équation différentielle de Bernoulli est de la forme $y' + a(x)y = b(x)y^m$ $m \neq 0, 1$ $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in C^0(I)$, avec une condition de convergence $y^m = y$. On se ramène au cas linéaire, en posant $z = y^{1-m}$.

Exemple 25: les solutions de $\begin{cases} y' - ty^2 + ty = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ sont de la forme $y(t) = -\frac{y_0}{1 + y_0 t}$

Méthode 26: (Equation de Riccati) Si y_0 est solution de (E): $y' = ay^2 + by + c$ avec $a, b, c \in C^0(I)$, alors on ramène (E) à une équation de Bernoulli par le changement de variable $z = y - y_0$.

III - Etude qualitative des solutions

1) Points d'équilibres, isoclines, intégrale première. On pose $_{\mathbb{R}^2} (E): y' = f(y)$ un système autonome de $\mathbb{R}^2$.

Définition 27: un point d'équilibre de (E) est un point y^* tel que $g(y^*) = 0$.

On dit que y^* est stable si, $(\mathbb{R}^+, y)$ étant solution de (E), $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|y(0) - y^*\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 \|y(t) - y^*\| < \epsilon$. Sinon on dit que y^* est instable.

On dit que y^* est asymptotiquement stable si, $(\mathbb{R}^+, y)$

étant solution de (E), $\exists \delta > 0 : \|y(0) - y^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - y^*\| = 0$

Exemple 28: (Pendule)

Soit $\gamma > 0$ et $w > 0$, l'équation du pendule est: $\theta'' = -\gamma \theta - w \sin(\theta)$

Définition 29: L'isocline verticale (resp. horizontale) de 186

g est l'ensemble: $I_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x, y) = 0\}$ (resp. $I_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_2(x) = 0\}$) où $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(y))$

Définition 30: Une intégrale première de (E) est 193 une fonction $H \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que pour toute

solution (x, y) de (E), on a $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} [H(y(t))] = 0$.

Exemple 31: L'énergie mécanique est une intégrale première en dynamique du pont.

$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos(y)$ est une intégrale première de $\theta'' + \sin(\theta) = 0$.

2) Etude de Lotka-Volterra et de son portrait de phase.

Définition 32: Un portrait de phase est une représentation géométrique de la trajectoire d'un système dynamique dans l'espace où il prend ses valeurs.

Théorème 33: On considère le système:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - bx(t)) \\ y'(t) = y(t)(-c + dx(t)) \end{cases} \text{ avec } a, b, c, d > 0$$

ou $x(0) = x_0, y(0) = y_0$

Alors (LT) admet une unique solution globale sur $\mathbb{R}$ $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. De plus, $t \mapsto (x(t), y(t))$ est périodique.

198

193

[6]

391

[187]

187

→ utilisation dans 4 domaines

* physique (mouvement pendule, équation de la chaleur)

* biologie (dynamique des populations, épidémie (ex Covid))

→ Intérêt majeur: prévoir l'évolution du phénomène qu'elles décrivent

Intro

Théorie

220: Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires

Etude qualitative

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

→ on peut tjr se ramener à l'ordre 1 donc la théorie est basée sur l'ordre 1

→ Existence + unicité par CL avec des conditions sur f

$$\text{comme ex } \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



2 solutions

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \begin{matrix} \text{Globale} \Rightarrow \text{max} \\ \text{si } y_0 < 0 \end{matrix}$$

sol bornée

si y(0) = y_0

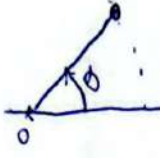
* Méthode factorielle intégrale: Intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (DEV1)

* méthode variation de la cste

* Riccati, Bernoulli (non linéaire)

* pt fixe / équilibre

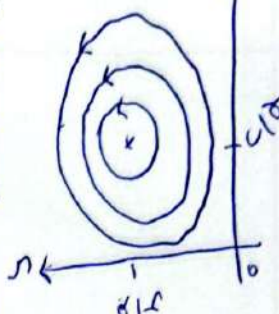
→ mouvement du pendule $\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$



* système Lotka Volterra

→ interaction proie prédateur
→ pas de solution explicite mais étude qualitative

→ isoclines
→ intégrale première



Comportement

→ solutions maximales
→ ne peut pas se prolonger
→ solutions globale
→ sur t l'espace de temps

Théorie de la solution de composés en temps finie

Globale $\Rightarrow \text{max}$

si $y_0 < 0$

sol bornée

si y(0) = y_0

Annexe

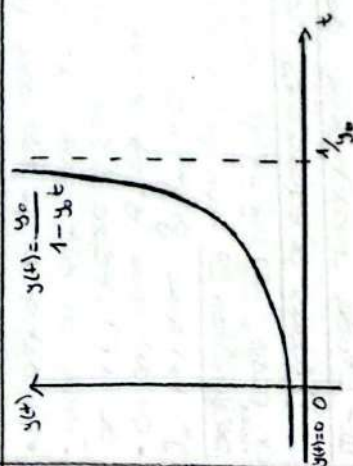
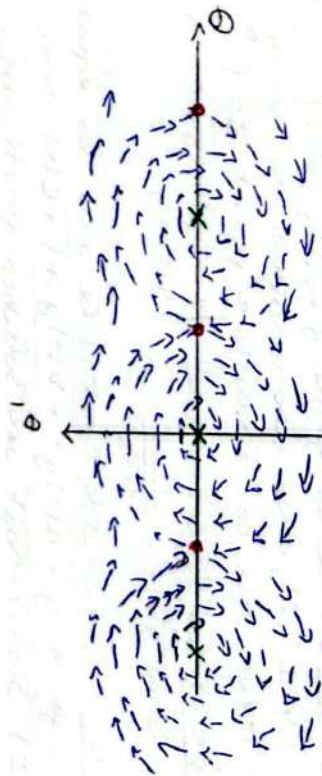
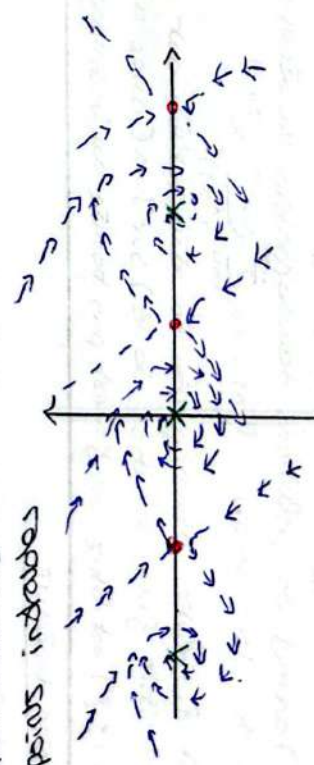


Illustration exemple 7 et 13

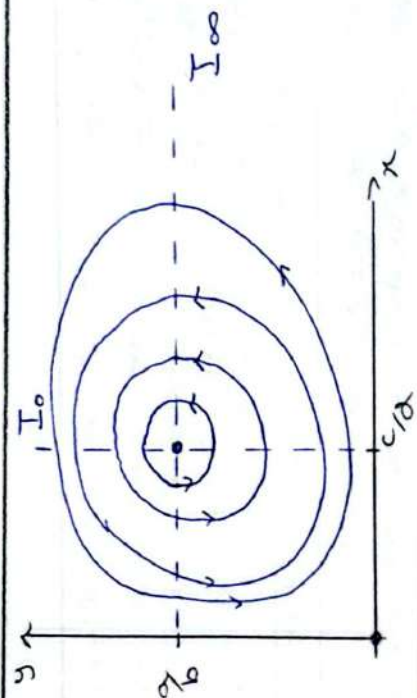


x points stables

• points instables



Points d'équilibre ou point fixe simple



Portrait de phase du système Lotka-Volterra.

Références:

- Equations différentielles, Berthelin
- Analyse, Gourdon.