

[G] [RA]
[EUC] [Rou]
[GK]

218: Formules de Taylor. Exemples et applications

I- Fonctions d'une variable réelle

1) Préliminaires [G] 71-73-74 76

- def dérivable
- dérivable $\Rightarrow C^0$ *
- dérivée n-ème
- Th de Rolle
- TAE
- IAP

2) Formules de Taylor [G] 75 77 [RA] 287 292

- Taylor Lagrange
- ex d'utilisation
- Ineq Taylor Lagrange
- Reste intégrale
- Young

3) Etude locale [RA] 307 [G] 83

- def
- unicité
- f dérivable si DL
- f n fois dérivable $\Rightarrow$ DL (Gp 89)
- ex
- série Harmonique

[DEV 1]

4) DSE [G] 247 251 RA 286 287

- def SE
- def fct DSE
- Th + Coro RA p. 285
- ex

5) En proba [GK]

- fct caractéristique
- Taylor Yang fct caractéristique
- Th de Levy
- TCL

DEVZ

[G] 323 328 II - Généralisation aux fonctions de plusieurs variables

ELAC 164

204

ROUV 297

- def différentiable
- def dérivable en a selon vecteur + dérivée partielle
- ex diff det
- composée diff
- IAF
- Taylor Lagrange
- Taylor Reste intégrale
- Taylor Yang

218: Formules de Taylor. Exemples et applications

I- Fonctions d'une variable réelle

Soit E un $\mathbb{R}$ evn. I un intervalle de $\mathbb{R}$. $(a, b) \in I^2$ a.d.

1) Préliminaires

Définition 1: On dit que $f: I \rightarrow E$ est dérivable en $a \in I$

si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe. S'il existe le cas on note cette limite $f'(a)$.

f est dérivable sur I si f est dérivable $\forall a \in I$ on définit alors $f': a \mapsto f'(a)$.

Proposition 2: Si f est dérivable sur I , alors f continue.

Contre-exemple 3: La réciproque est fautive:

$x \mapsto \sqrt{x}$ continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Définition 4: Par récurrence, on définit $\begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(n+1)} = f^{(n)'} \end{cases}$ $f^{(n)}$ est la dérivée n-ème.

Définition 5: $f: I \rightarrow E$ est de classe C^n si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I . On note $C^n(I, E)$ l'ensemble des applications de classe C^n de I dans E .

Théorème 6: (Rolle) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

1) f continue sur $[a, b]$ 2) f dérivable sur $]a, b[$ 3) $f(a) = f(b)$ Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 7: (Accroissement finis = TAF) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in]a, b[\quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème 8: (Inégalité accroissement finis = IAF) Soit $f: [a, b] \rightarrow E$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $M > 0$ tel que $\|f'(t)\| \leq M \quad \forall t \in]a, b[$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$

2) Formules de Taylor

Théorème 9: (Taylor-Lagrange) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a, b]$, tel que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$$

Remarque 10: avec $n=0$, on retrouve le TAF.

Application 11: $\forall x > 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
 $\forall x > 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Théorème 12: (Inégalité de Taylor Lagrange)

Soit $f: [a, b] \rightarrow E$ de classe C^n sur $[a, b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in]a, b[\quad \|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Alors

$$\|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 13: (Taylor avec reste intégral)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f: [a, b] \rightarrow E$ de classe C^{n+2} sur $[a, b]$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace de Banach. Alors

[6] 71

72

73 -74

Théorème 14: (Taylor Young) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{E}$ de classe C^n sur I . Soit $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $R \rightarrow 0$ on a:

$$f(a+R) = f(a) + Rf'(a) + \dots + \frac{R^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(R^{n+1})$$

3) Etude locale

Définition 15: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (avec I non réduit à un point) on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$ s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que:

$$\forall x \in I \quad f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$$

Proposition 16: Si f admet un DL à l'ordre n en a , le dernier est unique.

Théorème 17: f est dérivable en a ssi elle admet un DL d'ordre 1 en a .

Contre-exemple 18: L'existence d'un DL d'ordre $n \geq 2$ n'assure pas l'existence de $f''(a)$.

$f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ $x \neq 0$ $f(0) = 0$ n'admet pas de dérivée seconde en 0.

Proposition 19: Si $f: I \rightarrow \mathbb{E}$ est n fois dérivable en 0, alors f admet un voisinage de 0 où DL d'ordre n :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Exemples 20: • $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
• $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^n)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Application 21: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $H_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ Alors $\exists \ell \in \mathbb{R}^+$ $H_n = \ell(n) + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

4) Application: DSE

Définition 22: On appelle série entière toute série de fonction de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ ($a_n \in \mathbb{C}^n$)

Définition 23: Une fonction $f: \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est DSE au voisinage de 0 si sur ce voisinage, f coïncide avec une série entière de rayon de convergence non nul.

Théorème 24: Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $0 \in I$. Soit $g: I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ . g est DSE sur un voisinage de 0 ssi $\exists \alpha > 0$ tq $R_n(x) = g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ sur $] -\alpha, \alpha[$. Dans ce cas la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $\geq \alpha$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sur $] -\alpha, \alpha[$.

5) Applications en probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 25: On appelle fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X la fonction complexe:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_X(x)$$

Proposition 26: Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre N , alors ϕ_X est de classe C^N et $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\phi_X(t) = \phi_X(0) + \phi_X'(0)t + \dots + \frac{\phi_X^{(N)}(0)}{N!} t^N + o(t^N)$$

306

Théorème 27: (Lévy) Soit X_n, X v.a.r.,
on a: $X_n \xrightarrow{L} X \iff \phi_{X_n}(t) \rightarrow \phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

DEV 2

Théorème 28: (TCL)
Soit X_n une suite de v.a.r. iid admettant un moment d'ordre 2. Alors $Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - nEX_1 \right) \xrightarrow{L} N(0, Var(X_1))$

II- Généralisation aux fonctions de plusieurs variables

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$

Définition 29: L'application f est différentiable en $x \in U$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tel que
 $f(x+h) = f(x) + Lh + o(\|h\|)$ lorsque $\|h\| \rightarrow 0$
• L'application linéaire L est alors unique, notée $L = Df(x)$, la différentielle de f en x .
• Si f est différentiable sur U , elle est de classe C^1 si $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue.

Définition 30: f admet une dérivée partielle par rapport à la j ème variable en $x \in U$ si $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j+t, x_{j+1}, \dots)$ est dérivable en $t = x_j$. On note $\partial_j f(x)$ cette dérivée.

Exemple 31: $\forall x \in M_n(\mathbb{R}) \quad \forall h \in M_n(\mathbb{R}) \quad D_x \det = H = \text{Tr}(\text{com}(x)H)$

[EAG] 204

Théorème 32: (IAF) Si f différentiable sur U et $[x, y] \subset U$, alors $\|f(x) - f(y)\| \leq \left(\sup_{t \in [x, y]} \|Df(t)\| \|x - y\| \right)$

284

Théorème 33: (Taylor Lagrange) Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}, p+1$ fois différentiable sur U et $[a, a+h] \subset U$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
 $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(p+1)}(a+\theta h)}{(p+1)!} h^{p+1}$

285

Théorème 34: (Taylor Young)
Si f est de classe C^p en a , alors lorsque $h \rightarrow 0$:
 $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(\|h\|^p)$

Théorème 35: (Taylor - Reste intégral)
Si f est de classe C^{p+1} sur U et $[a, a+h] \subset U$ alors:
 $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(a+th) h^{p+1} dt$

Fct les + simples à calculer:

polynômes

donc on essaie d'approcher les fonctions par des polynômes

Preliminaires



Fct derivable?

* derivable $\Rightarrow C^0$

* Th de Rolle



* TAF

* IAF

generaliser
ex précisions

2.18: Formules de Taylor
Exemples et applications

Fonctions de plusieurs variables?

$\rightarrow$ différentiabilité

On retrouve les formules de Taylor qu'on démontre à l'aide des formules de Taylor sur $y, t \mapsto g(a+th)$

En proba

$\Phi_X C^n$ si $E[X^n] < +\infty$

Lagrange $\rightarrow$ reste de Taylor change en fct des hyp sur g

TCL

DEV2

DSE

On retrouve notre approximation polynômiale

Formules de Taylor

$g(x) = \text{Polynôme} + \text{reste}$

Reste intégrale

Young locale

ordre 1 = def de derivable

fct usuelles

DL

Application

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

DEV1

on approche en un pt précis des fct par des polynômes permet de lever les indéterminées pour le calcul de limite