

[G]
[ELAC]
[Rouv]

215: Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

I- Différentiabilité

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$

1) Différentielle et dérivées partielles [G] 323-327

- Def diff C^1

[ELAC] 164

178-179
183

- Rq: indep du choix de la norme

- ex: dans $\mathbb{R}$, polynomiale, M^{-1}

- def dérivées partielles + ex $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

- Prop: diff $\Rightarrow$ dérivées partielles

- CE $\frac{xy}{x^2+y^2}$ pas diff en 0

- Jacobienne

2) Règles de calcul [G] 324 [ELAC] 170

- prop $D(f+g)$

- Th différentielle de $g \circ f$

- ex: $f(\cos \theta, \sin \theta)$

3) Application au déterminant [Rouv]

DEV 1)

- Th: diff du det

II- Théorème des accroissements finis

1) Théorème [ELAC] 204 [G] 328 [Rouv] 104

- Th AF

- Coro: U convexe $\sup \|Df\| \leq K \Rightarrow K$ Lipschitz

2) Applications [G] 328 [ELAC] 188 209

- Prop: U convexe $Df=0 \Rightarrow f$ cst

- $f \in C^1 \Leftrightarrow$ dérivées partielles continues

- $t \mapsto \int_0^t \sin(\frac{1}{t})$

- Th: f_k diff $f_k \rightarrow f$ $Df_k \xrightarrow{CUV} G \Rightarrow f$ diff

- CE $t \mapsto \sqrt{t+\frac{1}{k}}$

III - Différentielles d'ordre supérieur

1) Définitions [ELAC] 263 273

- $\deg f + \deg C^k$
- ex: polynôme $\rightarrow \mathbb{C}^\infty$

2) Th de Schwarz [Rou] 294 [G] 329

- Th + CE $(x,y) \mapsto \int_0^{xy(x^2+y^2)} \frac{xy(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

3) Formules de Taylor [Rou] 297

- Taylor Young + Taylor Lagrange

IV - Applications

1) Difféomorphismes et inversion local [G] 343

- $\deg (C^k)$ difféo + difféo local 341
- Th inversion local et global
- Fct strictement monotone 350

DEV2

2) Problèmes d'extremes [G] 336 [ELAC] 352

- extrema $\Rightarrow Df(x_0) = 0$
- ex $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
- Hessienne
- Th: max et min locaux avec la Hessienne

215: Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

I - Différentiabilité

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$

1) Différentielle et dérivées partielles

Définition 1: L'application f est différentiable en $x \in M$ si il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + o(\|h\|) \text{ lorsque } \|h\| \rightarrow 0$$

• L'application linéaire L est alors unique, notée

$$L = Df(x), \text{ la différentielle de } f \text{ en } x.$$

• Si f est différentiable sur M , elle est de classe

$$C^1 \text{ si } Df: M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \text{ est continue.}$$

Remarque 2: Ces définitions ne dépendent pas du choix des normes.

Exemple 3: • Si $n=1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en x ssi f est dérivable, et $Df(x)R = f'(x)R \forall R \in \mathbb{R}$

• Toute application polynomiale est différentiable

• $f: GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$ est

différentiable et $Df(M)H = -M^{-1}HM^{-1} \forall M \in GL_n(\mathbb{R})$

$\forall H \in M_n(\mathbb{R})$

Définition 4: f admet une dérivée partielle par

rapport à la j -ième variable en $x \in M$ si

$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$ est dérivable en $t=x_j$

on note $\partial_j f(x)$ cette dérivée

Exemple 5: $\partial_i \det(A) = (\det A) \delta_{ij}$

Proposition 6: Si f est différentiable en $x \in M$, alors f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables et $Df(x)R = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) R_j \forall R \in \mathbb{R}^n$

Contre exemple 7: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pas différentiable en $(0,0)$.

Notation 8: $Sf(x) = (\partial_j f(x))_{j=1}^n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ la

matrice Jacobienne de f en x et si $m=1$

$$Df(x) = (\partial_j f(x))_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n \text{ le gradient de } f \text{ en } x$$

2) Règles de calcul

Proposition 9: Si $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont différentiables

en $x \in M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est différentiable

$$\text{en } x \text{ et } D(f + \lambda g)(x) = Df(x) + \lambda Dg(x)$$

Théorème 10: Si $f(u) \subset V$ ouvert de $\mathbb{R}^m, g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$

si f différentiable en $x \in M$ et $g \circ f$ en $f(x)$ alors

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

Exemple 11: • Si f différentiable sur $M, (x,y) \in M$,

$$\text{alors } \frac{d}{dt} [f(x+t(y-x))] = Df(x+t(y-x))(y-x) \forall t \in \mathbb{R}$$

• Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors $f|_{\mathbb{R} \times \{0\}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(r,0) \mapsto f(r,0)$$

est différentiable.

3) Application au déterminant

Théorème 12 Soit $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$M \mapsto \det M$$

$$D_x \det \cdot H = \text{Tr}(\text{Com}(x) H)$$

DEV 1)

II - Théorème des accroissements finis

1) Théorème

Théorème 13: Si f est différentiable sur M et $[x, y] \subset M$, alors $\|f(x) - f(y)\| \leq (\sup_{[x, y]} \|Df\|) \|x - y\|$.

Corollaire 14: Si M est convexe et $\sup_M \|Df\| \leq K$ alors f est K -Lipschitzienne sur M .

2) Applications

Proposition 15: Si M est convexe et $Df = 0$ sur M alors f est constante.

Théorème 16: f est C^1 sur M ssi ses dérivées partielles $\partial_i f$ ($1 \leq i \leq n$) existent et sont continues sur M .

Remarque 17: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \begin{cases} t^2 \sin(\frac{1}{t}) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est différentiable mais pas C^1 .

Théorème 18: Si $f_k: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($k \geq 1$) sont différentiables (f_k) converge simplement vers f et (Df_k) converge uniformément sur M vers G , alors f est différentiable sur M et $Df = G$.

Contre exemple 19: $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t + \frac{1}{k}}$.

III - Différentielles d'ordre supérieur

1) Définitions

Définition 20: Pour $k \geq 2$, f est k fois différentiable en $x \in M$ si f est $(k-1)$ fois différentiable sur un voisinage ouvert V de x et $D^{k-1}f: V \rightarrow \mathcal{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

est différentiable.

On note $D^k f(x) (h_1, \dots, h_k) = D(0^{k-1} f)(x)(h_1, \dots, h_k)$
 • f est de classe C^k si k fois différentiable et $D^k f$ est continue.

Exemple 21: Toute application polynomiale est C^∞ .

2) Théorème de Schwarz

Théorème 22: Si f est 2 fois différentiable en x alors $D^2 f(x)$ est symétrique.

Contre-exemple 23: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3) Formules de Taylor

Théorème 24: (Taylor-Young)

Si f est k fois différentiable en x ,
 $f(x+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x)(h, \dots, h) + o(\|h\|^k)$ lorsque $\|h\| \rightarrow 0$.

Remarque 25: En considérant $t \mapsto f(x+th)$ on obtient les formules de Taylor Lagrange avec reste intégral.

IV - Applications

1) Difféomorphismes et inversion locale

Définition 26: Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: u \rightarrow v$ est un (C^k) difféomorphisme si f est différentiable (C^k) inversible, et $f^{-1}: v \rightarrow u$ est différentiable.
 • $f: u \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un difféomorphisme local en $x_0 \in u$ si il existe des voisinages ouverts U_0, V_0 de $x_0, f(x_0)$ tq $f: U_0 \rightarrow V_0$ soit un difféomorphisme.

CDH
p 204
Gauthier
p 328

Rouy
p 104

Gauthier
p 328

CDH
p 195

CDH
p 203

CDH
p 263

Gauthier
p 341

Théorème 27: (Inversion local)
Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^1 est $Df(x_0)$ inversible, alors f est un difféomorphisme local en x_0 .
Corollaire 28: Si $f: U \rightarrow V$ est C^k , bijective et $Df(x)$ inversible $\forall x \in U$, alors f est un C^k -difféomorphisme.

Application: DEV2

Théorème 29: Soit E un espace euclidien de dimension finie. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\| \cdot \|$, la norme associée.
Une application $f: E \rightarrow E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que:
 $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$ (*)
On a alors:

- 1) $f: E \rightarrow E$ de classe $C^1 \Leftrightarrow \forall x \in E \quad \forall R \in \mathbb{R}$ vérifie (*) $\langle Df_x(R), R \rangle \geq k \|R\|^2$

2) Problèmes d'extremas

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Théorème 30: Si f est différentiable et admet un extrema en $x_0 \in U$, alors $Df(x_0) = 0$

Exemple 31: Les extremas locaux de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sont parmi $\{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

Gauthier
p 346
CDH
p 352

Définition 32: Si f est 2 fois différentiable en x , on note $Hf(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice Hessienne de f en x

Théorème 33: Soit f 2 fois différentiable en x_0 tel que $Df(x_0) = 0$

- ① Si f admet un maximum (minimum) local en x_0 , alors $Hf(x_0) \leq 0$ (≥ 0)
- ② Si $Hf(x_0)$ est définie positive (négative), alors f admet un minimum (maximum) local strict en x_0 .
- ③ Si $Hf(x_0)$ a 2 valeurs propres de signes opposés f n'a pas d'extremum local en x_0

Objectif : Approcher localement une fonction par une application linéaire

↳ on généralise la notion de dérivabilité

f différentiable en a si $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$f(x+h) = f(x) + Lh + o(\|h\|)$$

↳ $Df(x)$

Règles de calcul

Somme produit composée différentiable

différentiable $\Rightarrow$ continue

lien avec dérivées partielles

↳ Jacobienne Df

Exemple concret déterminant DEVI

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et Applications

Applications

- Diffeomorphismes
- TIL

fonctions strictement monotones DEVI

notions importantes

TAF

variable dès que f est différentiable

généralisation à

l'ordre supérieur

k fois différentiable

↳ conséquences

• f k lipschitz (k convexe)

• $Df=0 \Rightarrow f=0$ (k convexe)

...

matrice Hessienne

étude des extrema locaux

formules de Taylor

développement local plus approfondi