

213 : Espaces de Hilbert. Exemples et applications

I - Espaces de Hilbert

1) Des espaces préhilbertiens aux espaces de Hilbert [HAS] 480 - 482

- def préhilbertien + ex
- def norme
- id parallélogramme et polarisation
- CS
- Espace Hilbert + ex ℓ^2
- préhilbertien $\Leftrightarrow$ Hilbert

2) Orthogonalité 484

- def $\perp$
- def $A^\perp$
- Pythagore
- $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$ $A^\perp = \bar{A}^\perp$

II - Théorème de projection et conséquence 489 - 491

Dev 1

- Projection sur un convexe
- P_C 1-lipschitz
- Prop avec F ser fermé
- $F^{\perp\perp} = \bar{F}$ $\bar{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$

III Bases hilbertiennes

1) Def, existence, propriétés 359 485 502 - 506

- def orthogonale, orthonormée, totale
- def base hilbertienne
- ex $\ell^2(\mathbb{N})$
- Inégalité Bessel
- Th équivalence

• Gram-Schmidt

2) Application aux polynômes orthogonaux [ELA2] 40-47

- def poids
- def $L^2(I, \rho)$
- $L^2(I, \rho)$ Hilbert
- Existence (P_n)
- ex $e^{-x^2} \rightarrow$ Hermite
- Polynômes orthogonaux

DEV 2

3) Application aux séries de Fourier [ELA3] 171-173 193-195 213

- def $L^2_{\text{per}}([0, 2\pi])$
- def coeff Fourier
- $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ base hilbertienne
- $f = \sum c_n(f) e_n$
- Parseval
- Formule sommatoire Poisson.

Schéma id parallélogramme

Schéma projection sur un contexte

213: Espaces de Hilbert - Exemples et applications

I - Espaces de Hilbert

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Des espaces préhilbertiens aux espaces de Hilbert

Définition 1: Un espace préhilbertien est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où E est un $\mathbb{K}$ -ev et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E

Exemple 2: $(\mathbb{K}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i)$ est un espace préhilbertien

Définition 3: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. On définit la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in E$

Proposition 4: $\forall x, y \in E$ $\mathbb{K}$ -espace préhilbertien, on a:

1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$

2) Identité du parallélogramme: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

4) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2)$

Proposition 5: (Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in E$ $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. On a égalité ssi x et y sont liés.

Définition 6: On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour sa norme hilbertienne.

Exemple 7: $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad \forall x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert.

Remarque 8: En dimension finie, préhilbertien $\Rightarrow$ Hilbert

2) Orthogonalité

Définition 9: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace préhilbertien.

1) On dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$

2) On dit que deux parties non vides A et B de E sont orthogonales si $\forall x \in A \quad \forall y \in B, \langle x, y \rangle = 0$. On note $A \perp B$

Définition 10: Si $A \subseteq E$ non vide, on appelle orthogonal de A , noté $A^\perp$, l'ensemble:

$$A^\perp = \{x \in E, \langle x, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A\}$$

Proposition 11: (Pythagore) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments 2 à 2 orthogonaux dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilbertien. Alors on a $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$

Proposition 12: Soit $A \subseteq E$ non vide, alors $A^\perp$ est un sev fermé de E .

De plus $A^\perp = \operatorname{vect}(A^\perp)$ et $A^{\perp\perp} = A$

II - Théorème de projection et conséquences

1) Théorème de projection

489

Théorème 13: (Projection sur un convexe fermé)

Soit $(H, \|\cdot\|)$ espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors:

$\forall x \in H, \exists! y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$

y s'appelle la projection de x sur C , notée $P_C(x)$.
De plus $P_C(x)$ est caractérisée par

$$\forall z \in C \quad \operatorname{Re} \langle z - P_C(x), x - P_C(x) \rangle \leq 0$$

DEV1

Proposition 14: Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. L'application $P_C: x \mapsto P_C(x)$ est 1-lipshitzienne.

Théorème 15: Soit F un sous fermé de l'espace de Hilbert H . Alors $x \mapsto P_F(x)$ est linéaire continue $\forall x \in F, P_F(x) = x$ et $\|P_F\| = 1$ si $F \neq \{0\}$.

$H = F \oplus F^\perp$. En particulier, $\forall x \in F, \exists! y \in F$ et un unique $z \in F^\perp$ tels que $x = y + z$.

Corollaire 16: Soit F s.v.d'un Hilbert H . Alors:

$$1) F^{\perp\perp} = \overline{F}$$

$$2) \overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$$

III - Bases hilbertiennes

Supposons H préhilbertien de dimension finie

1) Définitions: existence, propriétés

Définition 17: Soit I ensemble non vide, $(e_i)_{i \in I} \subset H$.

on dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est:

485

1) orthogonale si $\forall i, j \in I (i \neq j) \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$

2) orthonormale si $\forall i, j \in I \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

3) totale lorsque toutes les combinaisons linéaires finies des e_i sont denses dans H .

359

Définition 18: Une famille orthonormale et totale de E est appelée base hilbertienne de E .

502

Exemple 19: Pour $H = \ell^2(\mathbb{N})$ en $(e_1, \dots, e_n, 0, \dots)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est une base hilbertienne de ℓ^2 .

504

Proposition 20: (Inégalité de Bessel) Pour toute famille orthonormale $(e_i)_{i \in I} \subset H, \forall x \in H$, on a

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Théorème 21: Soit $(e_i)_{i \in I}$ famille orthonormale de H .

Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un Hilbert, on a les équivalences:

1) $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H

2) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (égalité de Parseval)

3) $\forall x \in H \quad x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

4) $\forall x, y \in H \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$

506

Théorème 22: Si H est un Hilbert, alors tout espace de Hilbert non vide admet une base hilbertienne (admis)

Proposition 23: (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ famille libre finie de H . Alors on peut construire une base orthogonale $(u_1, \dots, u_n)$ de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $u_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

On procède par récurrence: $u_1 = e_1$

$u_2 = e_2 + \lambda_{12} u_1$, on veut $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ réalisé si

$$\lambda_{12} = - \frac{\langle u_1, e_2 \rangle}{\|u_1\|^2}$$

les vecteurs $u_1, \dots, u_{k-1}$ construits, on cherche

$$u_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ik} u_i \quad \text{on trouve } \lambda_{ik} = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, e_k \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

De plus en normalisant les vecteurs, on obtient une base orthonormée.

2) Application aux polynômes orthogonaux

On considère $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$

Définition 24: On appelle poids sur I , une application

$\rho:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_I x^n \rho(x) dx < +\infty$$

Définition 25: On appelle $L^2(I, \rho) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty\}$

Proposition 26: $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert et contient les fonctions polynômes

Théorème 27: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux avec $\deg(P_n) = n$

(Famille de polynômes orthogonaux associée à ρ)

Exemple 28: $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$: polynômes de Hermite

Théorème 29: Soit ρ une fonction poids sur I .

S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_a^b e^{-\alpha |x|} \rho(x) dx < +\infty$

alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

3) Application aux séries de Fourier

Soit l'espace de Hilbert $L^2_{\text{per}}([0, 2\pi]) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

2π périodique) et $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \forall f, g \in L^2_{\text{per}}$

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad e^{inx} = e^{-inx}$$

Définition 30: Soit $f \in L^2_{\text{per}}$. On définit les coefficients de Fourier de f par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \langle f, e^{inx} \rangle$

Théorème 31: $\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de L^2_{per}

Proposition 32: Soit $f \in L^2_{\text{per}}$. Alors:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} \quad \text{en} \quad L^2_{\text{per}}$$

Proposition 33: (Egalité de Parseval)

$$\forall f \in L^2_{\text{per}} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Application 34: (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |f(n)| < +\infty$

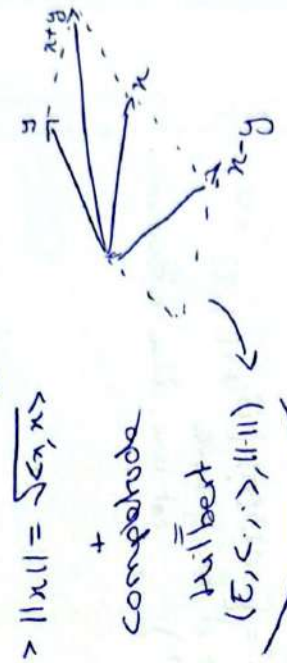
$$\text{et } \sup_{n \in \mathbb{Z}} n |f(n)| < +\infty. \quad \text{Alors} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in(x+2\pi k)}$$

Généralisation des espaces euclidiens / formateurs en dim infinie

↳ outils géométriques

Comment construire un espace Hilbertien ?

Espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
 A partir d'un evn $(E, \|\cdot\|)$ ssi $\|\cdot\|$ vérifie id parallélogramme



$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

+ complétude

Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$

↳ CS

↳ polarisation

$\ell^2(\mathbb{N})$ Hilbert

2.13 : Espaces de Hilbert Exemples et applications

Hilbert = evn base ?

dim finie OK

dim ∞ base hilbertienne (ei)

orthonormée $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$
+ totale

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Gram Schmidt permet de la construire et il en existe tjrs une.



Applications aux polynômes orthogonaux

base hilbertienne DEV2



Séries de Fourier $(e_n) = e^{-in\theta}$ base hilbertienne

↳ Poisson

+ généralisation à des ser fermés

Projection sur un convexe fermé



minimise une distance

DEV1