

[R] [TL1]
[ELA]
[ELA2]

209. Approximation d'une fct par des fct régulières Exemples et applications

I-Approximation d'une fct régulière

1) Approximation locale [R] 330 326 [TL1] 80

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -evn

- def $\mathcal{dl}$
- fct polynomiale
- Th du $\mathcal{dl}$
- Taylor Young + ex
- def C^1
- Th min local max local
- Taylor Lagrange
- Inégalité de Taylor Lagrange

2) Approximation uniforme de fct continues ELA 143-144 197

- def cvs CVU (CVN série)
- $CVU \Rightarrow CVS$
- $CVN \Rightarrow CVU$ (série)
- ex $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n \quad z \in \mathbb{C}$
- Th Weierstrass
- Application $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0 \quad \forall n \Rightarrow f=0$

DEV 1

II-Approximation dans les espaces L^p

1) Produit de convolution [ELA2] 75-81

- def
- Th

2) Densité [ELAL] 86-88 85-86

- C_c^∞ dense dans L^p
- def approximation de l'unité + ex

• Th. de Weierstrass

• def C_c^∞

• $f \in C_c^\infty \rightarrow f$ dans L^p

DEV 2

• C_c^∞ dense dans L^p

III - Approximations de fonctions périodiques

• def L_{per}^p

• def coeff. Fourier

• def système trigonométrique

• def polynôme trig.

• Weierstrass trig.

• Parseval

• moyenne Cesàro

• Fejér

[ELAZ] 122-127

[R] 579-595

209: Approximation d'une fonction par des fonctions régulières

Exemples et Applications

I- Approximation d'une fonction régulière

1) Approximation locale

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $(\epsilon, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -e.v.n.

Définition 1: On dit que $f: I \rightarrow E$ admet un développement

limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $\alpha \in I$ s'il existe une suite

(a_k) $_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que la fonction

$x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n (x-\alpha)^k a_k$ soit négligeable devant la

fonction $x \mapsto (x-\alpha)^n$, ce qui s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (x-\alpha)^k a_k + o_{x \rightarrow \alpha}((x-\alpha)^n)$$

Remarque 2: La fonction $P: x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k a_k$ est dite polynomiale

Théorème 3: Si $f: I \rightarrow E$ admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $\alpha \in I$, ce dernier est unique.

Théorème 4: (Taylor-Young)

Si $f: I \rightarrow E$ est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en $\alpha \in I$, on a

$$\text{alors: } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-\alpha)^k}{k!} f^{(k)}(\alpha) + o_{x \rightarrow \alpha}((x-\alpha)^n)$$

Exemple 5: Ce résultat permet d'obtenir les DL classiques en 0:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \quad \bullet \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\bullet \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \quad \bullet \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+3})$$

$$\bullet (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) \frac{x^k}{k!} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

Définition 6: Soit $\mu \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $a \in \mu$ est un point critique de f si $Df_a = 0$.

Théorème 7: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Soit $a \in I$ telle que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, f admet un minimum local en a . Si $f''(a) < 0$, f admet un maximum local en a .

Théorème 8: (Taylor-Lagrange)

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Théorème 9: (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Si $f: [a, b] \rightarrow E$ est de classe C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ avec $f^{(n+1)}$ majorée, on a alors:

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

2) Approximation uniforme de fonctions continues

Définition 10: Soient X un ensemble, f_n une suite de fonction de X dans E .

On dit que (f_n) converge simplement vers f si

$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$

On dit que f_n converge uniformément vers f si

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in X \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$

• la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement si les f_n sont bornées et si la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ converge

Proposition 11: convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple (pour les séries) - convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme

Exemple 12: $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ pour $z \in \mathbb{C}$

Théorème de Weierstrass 13: DEV 1

Toute fonction continue $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes

Application 14: Si $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 x^n g = 0$ alors $g = 0$

II - Approximation dans les espaces L^p

1) Produit de convolution

Définition 15: On dit que deux fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolutables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors, le produit de convolution de f et g par:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt$$

Théorème 16: Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R})$

1) $\rho \mapsto f(\rho - t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

$$2) \|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Théorème 17: Soit $\rho \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué. On a $\forall f \in L^p(\mathbb{R}), \forall g \in L^q(\mathbb{R})$:

$$1) f * g \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ et } \|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

2) $f * g$ est uniformément continue

2) Densité

Théorème 18: $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$

Définition 19: (Approximation de l'unité)

On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$, toute suite $(f_j)_{j \geq 1}$ de fonctions mesurable sur $\mathbb{R}$ telle que: 1) $\forall j \in \mathbb{N}^* f_j \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f_j(x) dx = 1$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{|x| > \varepsilon} f_j(x) dx = 0$$

Exemple 20: approximation de Laplace: $f_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}$

Théorème 21: Soit $(f_j)_{j \geq 1}$ une approximation de l'unité

1) si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée alors $(f * f_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$

2) si $f \in L^p(\mathbb{R})$ $p \in [1, +\infty[$, alors $(f * f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$

Définition 22: On note $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions de classe C^{∞} à support compact sur $\mathbb{R}$

Théorème 23: Soit $\rho \in [1, +\infty[$ et $(f_j)_{j \geq 1} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ $\forall f \in L^p(\mathbb{R}) f * f_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ dans $L^p(\mathbb{R})$

Théorème 24: Pour $\rho \in [1, +\infty[$ $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ DEV 2

III - Approximations de fonctions périodiques

Définition 25: On note $L_{per}^p(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions 2 π périodiques localement riemann intégrables

On le munit du produit scalaire hermitien $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$

Définition 7 (coefficients de Fourier)

Soit $g \in L^2_{\text{per}}$, $n \in \mathbb{Z}$. On appelle le n -ième coefficient de Fourier de g : $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-in x} dx = \langle g, e^{in x} \rangle$

Lemme 26: La famille $(t \mapsto e^{in t})$ est orthogonale par rapport au système trigonométrique. On note en $t \mapsto e^{int}$ est la somme partielle des coefficients de Fourier est $S_n(g) = \sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt}$

On définit les coefficients de Fourier réels :

$$a_n(g) = c_n(g) + c_{-n}(g)$$

$$b_n(g) = i(c_n(g) - c_{-n}(g))$$

Définition 28: On appelle polynôme trigonométrique toute fonction de la forme $\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt}$

$$\text{ou } a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Théorème 29: (Weierstrass trigonométrique)

Toute fonction continue 2π -périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques

Théorème 30: (Parseval)

$$\text{Pour tout } g \in L^2_{\text{per}} \quad \|g\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(g)|^2$$

Définition 31: On pose $\sigma_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(g)$ la moyenne de Césaro

Théorème 32: (Fejér)

$\forall g \in L^1_{\text{per}} \quad (\sigma_n(g))_n$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$

Approximation locale

$$f(x) = \dots$$

Formules de Taylor

utile pour l'étude
d'extremes locaux

Par des fonctions continues sur un compact

ex: polynômes $\rightarrow$ très régulières
et très simples
à étudier

Weierstrass
DEV 1

209: Approximation d'une fonction par
des fonctions régulières. Exemples et
Applications

cas spécifique:

fonctions périodiques $L^{2\pi}$
per

$\hookrightarrow$ Weierstrass trigonométrique

Fajet

DEV 2

$\hookrightarrow$ densité dans L^p

on veut approximer des fonctions en norme

$$\|f - g_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Outil: convolution

• approximation de l'unité

Résultat de: $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans L^p