

[G]
[GK]
[HAS]

208: Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I- Généralités

1) Espaces - vectoriels normés [G] 7,8 47

- def norme + ex
- def evn + ex
- def normes équivalentes + m topo

2) Applications linéaires [G] 48

F K -evn et $\mathcal{L}(E, F)$ $\mathcal{L}_c(E, F)$

- Th équivalence $\| \cdot \|$
- def $\mathcal{L}_c$ avec $\| \cdot \|$
- composition

II- Cas de la dimension finie [G] 50

E de dim finie

DEV 1)a)

- Th équivalence normes
- $\mathcal{L}E$ dim ∞
- App linéaire evn dim finie est $\mathcal{C}^0$
- $\mathcal{L}E$ en dim ∞
- evn dim finie complet
- sev de dim finie fermé
- parties compact = fermées bornées
- $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ compact

DEV 1)b)

- Riesz

III- Complétude

1) Espaces de Banach [G] 20-21 48

- def complet

- def Banach
- F Banach $\Rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ Banach
- $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach

2) Espaces L^p [GK] 208 - 213

- def L^p L^∞
- equivalence et def L^p
- Hölder
- Minkowski
- $(L^p, \|\cdot\|_p)$ e.v.
- L^p complet

DEV2

3) Espaces de Hilbert

- def + ex ℓ^2
- CS + identité parallélogramme
- Projection sur un convexe
- P_C est 1-lipschitz
- Th représentation de Riesz

DEV3

208: Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un e.v.n sur K

I - Généralités

1) Espaces vectoriels normés

Définition 1: Une norme sur E est une application

$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que:

- 1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- 2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in K \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemple 2: $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{C}$

$\forall \alpha \geq 1 \quad \|x\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Définition 3: On dit que E muni d'une norme est un K -espace vectoriel normé (e.v.n)

Exemple 4: $B(X, E)$ l'ensemble des applications bornées d'un ensemble X sur un e.v.n E est un e.v.n pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$

Définition 5: Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes si $\exists a > 0, \exists b > 0 \quad \forall x \in E$
 $a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1$

Remarque 6: Deux normes équivalentes définissent des distances et topologies équivalentes.

2) Applications linéaires continues

Soit F un K -e.v.n et $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Théorème 7: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre:

- 1) f continue sur E
- 2) f est continue en 0
- 3) $\exists M > 0$ tq $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$
- 4) f est lipschitzienne
- 5) f est uniformément continue

Définition 8: $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la norme $\|f\|$ est un e.v.n avec $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$

Proposition 9: Soient G un e.v.n, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$

En particulier la norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre.

II - Cas de la dimension finie

On suppose ici que E est de dimension finie.

Théorème 10: Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Contre-exemple 11: Ce théorème est faux en dimension infinie. Dans $\mathcal{L}([0, 1], \mathbb{R})$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.



Corollaire 12: Toute application linéaire d'un e.v.n de dimension finie dans un e.v.n q.c est continue.

Contre-exemple 13: C'est faux en dimension infinie $E = \mathbb{R}[X]$ avec $\|p\|_\infty = \sup |a_i|$. $p \mapsto p'$ linéaire pas continue.

Corollaire 14: Tout e.v.n de dimension finie est complet.

Corollaire 15: Tout s.v. de dimension finie d'un e.v.n est fermé.

Corollaire 16: Les parties compactes d'un e.v.n de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Exemple 17: On $(\mathbb{R})$ est compact dans $G_n(\mathbb{R})$.

Théorème 18: (Riesz) Un e.v.n est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

III - Compacité

1) Espaces de Banach

Définition 19: Un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy converge.

Un e.v.n complet est appelé espace de Banach.

Proposition 20: Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Exemple 21: $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

2) Espace L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 22: Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $\int_X |f(x)|^p d\mu < +\infty$.

On note $\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p d\mu)^{1/p}$.

On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $\|f\|_\infty < +\infty$ où $\|f\|_\infty = \inf \{M \in \mathbb{R}, \mu(\{x \in X, |f(x)| > M\}) = 0\}$.

Proposition 23: Soit $f \in \mathcal{L}^p$ et $g = f \cdot \mu$.

Alors $g \in \mathcal{L}^p$ et on pose $g \cdot f$ ssi $g = f \cdot \mu$.

On note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \sim$.

Théorème 24: (Inégalité de Hölder) Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$ alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. Alors $f+g \in \mathcal{L}^p$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Proposition 25: Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ est un e.v.n.

Théorème 26: (Riesz-Fischer) Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{L}^p$ est complet.

3) Espaces de Hilbert

Définition 28: Un K -espace vectoriel H est un espace de Hilbert s'il est préhilbertien et complet pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 29: $(\ell^2(I), \langle \cdot, \cdot \rangle, \| \cdot \|_2)$ est un espace de Hilbert

lemme 30: Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un K -espace préhilbertien $\forall x, y \in H$ on a:

$$1) |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

$$2) \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{idarité du parallélogramme})$$

Théorème 31: (Projection sur un convexe fermé)

Soit H un Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H . Alors $\forall x \in H \exists ! y \in C$ tq

$$\|x-y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|$$

On dit que $z = P_C(x)$ est la projection de x sur C . Il est caractérisé par la propriété:

$$\forall y \in C \quad \operatorname{Re}(\langle x-y, z-y \rangle) \leq 0 \quad \forall z \in C$$

Corollaire 32: L'application $P_C: H \rightarrow C$ est 1-lipshitz

Théorème 33: (Représentation de Riesz)

Soit H un Hilbert. $\forall \phi \in H'$, $\exists ! y \in H$ tel que

$$\phi(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H.$$

Cadre de base de l'analyse fonctionnelle.

Comment une structure algébrique simple (ev) peut-elle être enrichie par une norme.

- ↳ convergence
- ↳ continuité
- ↳ compacité ...

208: Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

