

[G]
[Ber]

206. Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I- Espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -evn

1) Normes équivalentes [G] 47-50

DEV 1a)

- def + in topologie
- Th normes équivalentes
- $\mathbb{C}$ en dim ∞ $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$
- evn de dim finie est complet
- sev de dim finie est fermé

2) Applications linéaires [G] 48-50

- Th avec équivalence $f \in \mathcal{C}^0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^0 \circ \mathcal{C}^0 \Leftrightarrow \dots$
- App lin d'un evn de dim finie est $\mathcal{C}^0$
- $\mathbb{C}$ en dim ∞ $P \mapsto P'$

3) Compacité [G] 50

DEV 1b)

- Compact d'un evn de dim finie = fermé borné
- Th Riesz
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ + fermés bornés de $\mathbb{R}^n$
- Homéomorphisme de l'exponentielle

II- Calcul différentiel

1) Différentiabilité [G] 323-327

- def + rq sur la dim finie
- dérivable selon direction
- Prop diff $\Rightarrow$ dérivée selon direction
- def dérivée partielle

- $Df(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$
- Jacobienne

2) Résultats complémentaires [G] 326 335-336

- 2 fois diff
- Schurze
- extremum local $\Rightarrow Df(a) = 0$
- Hessienne + symétrique
- lien avec min et max
- extrema liés
- minimum norme matriciel

DEV2

III - Equations différentielles linéaires [Ber] 12 30 35

- deg
- CL linéaire
- SA et J

206: Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K - e.v.n

1) Normes équivalentes

[G] Définition 1: Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes si $\exists a > 0$ $\forall x \in E$ $a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \frac{1}{a}\|\cdot\|_1$

Remarque 2: Deux normes équivalentes définissent la même topologie

Théorème 3: Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Contre-exemple 4: Ce Théorème est faux en dim infinie. Dans $\mathcal{L}([0,1], \mathbb{R})$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Corollaire 5: Tout e.v.n de dimension finie est complet

Corollaire 6: Tout seu de dimension finie d'un e.v.n est fermé.

2) Applications linéaires

Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n

Théorème 8: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre:

1) f continue sur E

2) f continue en 0

3) $\exists M > 0$ tq $\|f(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$

4) f est lipschitzienne

Corollaire 9: Toute application linéaire d'un e.v.n de dimension finie dans un e.v.n qc est continue

Contre-exemple 10: C'est faux en dimension infinie

$E = \mathbb{R}[X]$ avec $\|P\|_\infty = \sup |a_i|$. $P \mapsto P'$ linéaire pas continue

3) Compacité

Corollaire 11: Les parties compactes d'un e.v.n de dimension finie sont les parties fermées bornées

Théorème 12: (Riesz) E est de dimension finie

ssi $B_E(0,1)$ compact.

Exemple 13: Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les segments $[a,b]$ compact dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

Application 14: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

II - Calcul différentiel

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ - e.v.n de dimension finie,

U un ouvert de E , $a \in U$ et $f: U \rightarrow F$

1) Différentiabilité

Définition 15: On dit que f est différentiable en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que:

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

Si φ existe, φ est unique et s'appelle la différentielle de f en a . On la note $Df(a)$

[G] 48

50

[G] 323

Remarque 16: En dimension finie, $Df(a)$ ne dépend pas de la norme choisie.

324

Définition 17: Soit $v \in E$. Si la fonction à variable réelle $\varphi: t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$, f est dite dérivable en a selon le vecteur v . On note alors

$$f'_v(a) = \varphi'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Proposition 18: Si f est différentiable en a , alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et on a: $Df(a)(v) = f'_v(a) \quad \forall v \in E$.

On prend désormais $E = \mathbb{R}^n$ et $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 19: Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, si f est dérivable en a selon e_i , on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i et on note $f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

325

Théorème 20: Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et sont continues en $a \in U$, alors f est différentiable en a et on a

$$Df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Définition 21: Soit $\beta' = (e'_1, \dots, e'_m)$ base de $F = \mathbb{R}^m$.

$f = \sum_{i=1}^m f_i e'_i$ où $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a , do

327

Soit que $\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad Df(a)(e_j) = \sum_{i=1}^m Df_i(a)(e_j) e'_i$
 $= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) e'_i$

La matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques est $J_a = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice Jacobienne de f en a .

2) Résultats complémentaires

Définition 22: Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U . On dit que f est deux fois différentiable en a lorsque Df est différentiable en a .

(5)

Théorème 23: (Schwarz) Soit f deux fois différentiable en $a \in U$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Proposition 24: Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en $a \in U$ et si f est différentiable en a , alors $Df(a) = 0$.

335

Définition 25: Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en a . On définit sa matrice Hessienne par $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

Remarque 26: Cette matrice est symétrique.

336

Théorème 27: Soit $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Supposons qu'il existe $a \in M$ tel que $Df(a) = 0$. Si $Hf(a)$ est définie positive (respectivement définie négative) alors f admet un minimum local (resp max local) en a .

Théorème 28: (Extrema liés)

Soient $f, g_1, \dots, g_r: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions de classe C^1 . Soit $\Gamma = \{x \in M \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $Dg_i(a)$ $\forall i$ sont linéairement indép alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tq $Df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dg_i(a)$.

Ces nombres sont uniques et appelés multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 29: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_2 = \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 \right)^{1/2} = \left(\text{Tr}(M^T M) \right)^{1/2}$ avec m_{ij} les coefficients de M .

Alors $S_0(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ de norme minimale

DEV2

III - Equations différentielles linéaires

Définition 30: On dit que l'équation $y' = g(t, y)$ est une équation différentielle linéaire si

[Ber] 12

$g(t, y) = A(t)y + B(t)$ où $A \in C^0(I, M_n(K))$, $B \in C^0(I, K)$ 30

Théorème 31: (Cauchy-lipschitz linéaire) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C^0(I, M_n(K))$, $B \in C^0(I, K^n)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^n$. Alors il existe une unique solution au pb de Cauchy $y'(t) = A(t)y + B(t)$, $y(t_0) = y_0$.

Proposition 32: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C^0(I, M_n(K))$ alors

- L'ensemble S_H des solutions de $y'(t) = A(t)y(t)$ est un $\mathbb{K}$ -EV de $C^0(I, K^n)$
- L'ensemble $\tilde{S}$ des solutions de $y'(t) = A(t)y + B(t)$ est un $\mathbb{K}$ -espace affine de direction S_H .

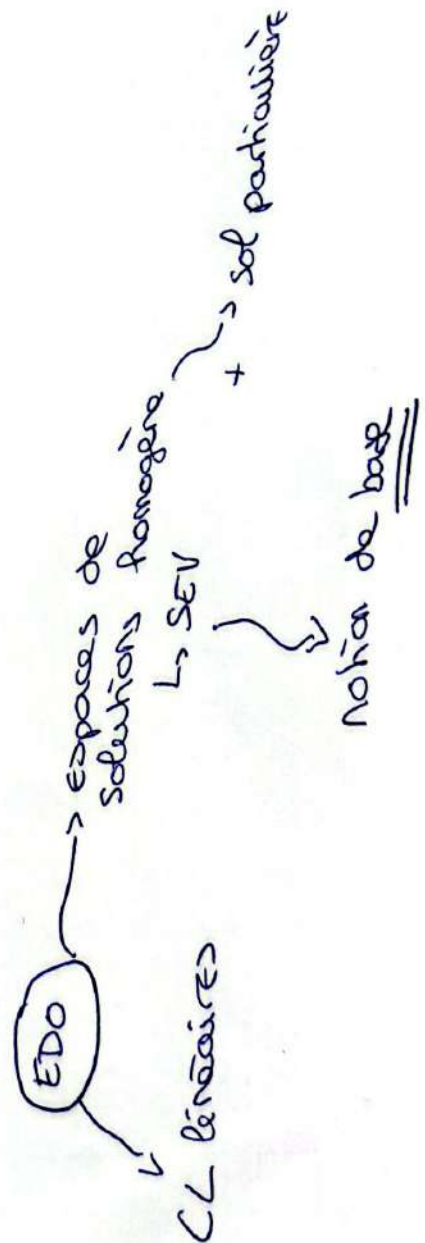


206: Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

$C^0 =$ linéaire

Applicatoire

$C^0 \subset C^1 \subset C^\infty$
 $C^\infty \Rightarrow$ Lipschitz



En Calcul Diff

- choix norme
- app linéaires C^0
- Bases canoniques = dérivées partielles

recherche d'extremes

$$Df(a) = 0 \text{ si a pt critique}$$

on peut étudier la Hessienne (symétrique)

Application

Son(1R) minimise $S_n(1R)$ DEV2