

204: Connexité. Exemples et applications

(X, d) espace métrique

I- Espaces connexes

1) Définitions et propriétés [HAS] 233-238 [G] 39

- def
- équivalence pour la connexité
- $\mathbb{Q}$ pas connexe
- $\mathbb{R}$ connexe

2) Stabilité de la connexité [HAS] 234-238 [HAU] 286

- $X = U \cup V \Rightarrow A \subset U \cup A \subset V$
- $A \subset B \subset \bar{A}$
- $A \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow \cup A_i$ connexe
- intersection connexe pas connexe

II- Raffinement de la connexité

1) Composantes connexes [HAS] 241-246 [G] 41

- def relation d'équivalence
- composantes connexes
- partition de X . $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[$
- Prop.
- $\mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts $2a$ à 2 disjoints.

2) Connexité par arcs [HAS] 247-248 [G] 42

- def chemin
- def
- connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe
- $CE(\mathbb{R})$ $X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in]0, 1]\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$

- f continue $\Rightarrow f(X)$ connexe par arcs
- $GL_n(\mathbb{C})$
- Dans EVN connexe $\Leftrightarrow$ connexe par arcs

III - Application à la connexité

1) Analyse réelle [G] 41 [HAS] 289

- TVI ($f(I)$ intervalle)
- $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue admet un pt fixe

2) Fonctions strictement monotone [G] 350

- Th

3) En Algèbre linéaire. [FRAA-2] 80

- Hadamard
- Diagonale Gershgorin
- Th

DEV 1

204: Connexité. Exemples d'applications

On considère (X, d) un espace métrique.

I - Espaces connexes

1) Définitions et propriétés

Définition 1: On dit que X est connexe s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints: si $X = U \cup V$ avec U et V ouverts disjoints alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$

Proposition 2: On a équivalence entre:

- 1) X est connexe
- 2) X n'est pas réunion de deux ensembles fermés non vides disjoints.
- 3) Toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.

Exemple 3: L'ensemble vide $\emptyset$ et tout singleton X est connexe.

$\mathbb{Q}$ n'est pas connexe de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

Théorème 4: Soit (Y, d') un espace métrique et $f: X \rightarrow Y$ application continue. Si X est connexe alors $f(X)$ connexe

Théorème 5: $\mathbb{R}$ est connexe et ses parties connexes sont les intervalles

2) Stabilité de la connexité

Proposition 6: Soient $A \subset X$ partie connexe

Si U et V sont des ouverts (resp. fermés) disjoints de X tels que $X = U \cup V$, alors $A \subset U$ ou $A \subset V$.

Proposition 7: Soient $A, B \subset X$. Si A est connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B connexe.

Théorème 8:

1) Soit $(A_i)_{i \in I}$ famille de parties connexes de X .

Si $\forall i, j \in I, A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe. En particulier si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ connexe

2) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties connexes de X telle que $\forall n \geq 0, A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ connexe

Contre-exemple 9: Une intersection de connexes n'est pas forcément connexe

II - Raffinement de la connexité

1) Composantes connexes

Définition 10: On définit sur X la relation d'équivalence $\sim$ par: $(x, y) \in \sim \Leftrightarrow \exists C$ connexe de X tel que $x \in C$ et $y \in C$.

Définition 11: Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les composantes connexes de X .

Pour $x \in X$, on note C_x la composante connexe qui la contient

Remarque 12: Les composantes connexes de X forment une partition de X . Ainsi X est connexe

si et seulement si il n'a qu'une seule composante connexe.

Exemple 13. $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Théorème 14: On a les propriétés suivantes:

1) C_n est la réunion des ensembles connexes de X contenant x . C'est la plus grande, pour l'inclusion, des parties connexes de X contenant x .
2) Les composantes connexes de X sont connexes et fermées dans X .

3) Si X possède un nombre fini de composantes connexes, alors chacune de ces composantes est ouverte dans X .

4) Tout ensemble connexe non vide étant à la fois ouvert et fermé dans X , est une composante connexe.

Proposition 15: Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints.

2) Connexité par arcs

Définition 16: Soient $x, y \in X$. On appelle chemin dans X reliant x à y toute application continue $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$. Le point x est appelé l'origine du chemin et y son extrémité.

Lemme 17: On définit la relation d'équivalence sur X :
 $x \sim y \iff \exists$ un chemin dans X reliant x à y .

Définition 18: On dit que X est connexe par arcs si X possède une unique classe d'équivalence $\sim$. Autrement dit $\forall x, y \in X$, il existe un chemin reliant x à y .

Proposition 19: Si X connexe par arcs alors X est connexe.

Contre-exemple 20: La réciproque est fautive.

Dans $\mathbb{R}^2$: $X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in]0, 1[\} \cup \{(0, 1)\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Proposition 21: Si X est connexe par arcs et f est une application continue, alors $f(X)$ est connexe par arcs.

Proposition 22: $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert et connexe par arcs.

Théorème 23: Soit M un ouvert d'un $\mathbb{R}^n$ ($X, ||\cdot||$). Alors M est connexe si M connexe par arcs.

III - Applications de la connexité.

1) Analyse réelle

Théorème 24: (des valeurs intermédiaires) Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

[HAB]
259

Théorème 25: Toute fonction continue $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$ possède un point fixe.

2) Fonctions strictement monotones

[G]
350

Théorème 29: Soit $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ l'espace euclidien de dimension n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$, la norme associée.

Une application $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \langle g(x) - g(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2 (*)$$

On a alors :

1) $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall A \in \mathbb{R}^n$
vérifie (*) $\langle Dg(x)(A), A \rangle \geq k \|A\|^2$

2) Si $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 alors g est un
vérifie (*) C^1 -difféomorphisme
de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

3) En Algèbre linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [1,n]} \in M_n(\mathbb{C})$. On pose
 $\forall i \in [1, n] \quad R_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

[FRA]
80

lemme 30: (Hadamard) Si A est à diagonale strictement dominante i.e $\forall i \in [1, n] \quad |a_{ii}| > R_i$ alors $A \in GL_n(\mathbb{C})$

lemme 31: (Disques de Gershgorin)
On a $\bigcup_{i=1}^n D_i \subset \text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$

Théorème 32: Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est à diagonale strictement dominante, alors : $\det(A) > \prod_{i=1}^n (|a_{ii}| - R_i)$

Intuitivement:

Espace connexe = un seul bloc
on peut pas le séparer en
plusieurs blocs.

↳ pas réunion de 2 ensembles
ouverts non vides disjoints.

↳ dans $\mathbb{R}$ ce sont
les intervalles

↳ stabilité par fct c

↳ intersection avec
contrainte.

En analyse réelle
TVI

↳ connexité = notion topologique
ne dépend pas de la
distance.

Composantes connexes

Morceaux connexes d'un
espace non connexe.

↳ utile lorsque l'espace n'est
pas connexe.

$$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

204: Connexité: Exemples et applications

ouvert + fermé = $\neq$ l'espace

↳ Fct strict monotone
DEV1

Connexité par arcs
⇒ connexe
↳ permet de montrer
la connexité



En algèbre

Localisation des vp
DEV2

connexe ⇒ connexe

image d'un connexe est connexe + connexes de $\mathbb{R}$

$GL_n(\mathbb{R})$ pas
connexe
[]

$GL_n(\mathbb{Q})$ oui