

203: Utilisation de la notion de compacité

I- Notion de compacité

1) Propriété de Borel Lebesgue [G] 27-28

- def recouvrement / compacité
- réunion et intersection de compacts

2) Propriété de BOLZANO WEIERSTRASS [G] 28-30

- Th BW
- compact $\Rightarrow$ fermé borné
- compacts de $\mathbb{R}$
- produit de compacts

II Compacité et fonctions continues

1) Extrémas [G] 31

- Image d'un compact
- Th bornes atteintes
- distance à un compact
- Rolle
- TAF

2) Th d'uniformité [G] 31

- Heine
- Polynômes de Bernstein
- Th Weierstrass 235
- application

DEV 1

3) Th de pt fixes [G] p34

- prop + ex

[G] 50-56

III- Compacité dans un evn de dimension finie

DEV 2

- équivalence des normes et Théorème de Riesz
- contre exemples

203: Utilisation de la notion de compacité

- retrouver en dim infinie des propriétés de finitude
- un compact $\sim$ ensemble fini
- ↳ extraction de ss suite, atteinte des bornes ...

droite réelle avec une suite

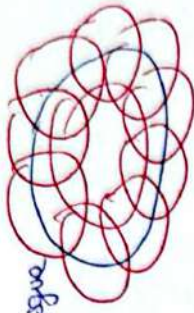
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
sur un segment
on trouve une
ss suite cu

→ BW

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pas compact
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pas compact
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pas compact

Ensemble compact

Borel-Lebesgue



fermé

- stable intersect° qc
- stable réunion finie
- produit de compact

DEV2 Th de Weierstrass
résultat de densité
sur les fct C^0

EVN

Normes
équivalentes
en dim fini

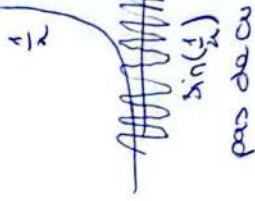
DEV2

$B_E(0,1)$ compact

E dim finie

Fct continues

expose



Th des bornes
atteintes

+ simple sur un compact

Legon 203 - Utilisation de la notion de compacité

Soit (X, d) et (Y, δ) des espaces métriques.

I - Notion de compacité.

Définition 1: On dit que (X, d) est compact si de tout recouvrement de X par des ouverts de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Autrement dit, si $X \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouverts pour tout i , il existe $J \subset I$, J fini tel que $X \subset \bigcup_{i \in J} O_i$.

Exemple 2: - si X est fini alors (X, d) compact.

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas compact: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$.

Proposition 3: Un espace métrique compact est borné.

Proposition 4: (des fermés emboîtés)

Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact X alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Remarque 5: La compacité est cruciale: considérer

$$X = \mathbb{R} \text{ et } ([-n, +\infty[)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Proposition 6: Soit (X, d) compact. Soit $A \subset E$.

Alors A compact $\Leftrightarrow A$ fermé.

Proposition 7: Une réunion finie de parties compactes est compacte.

Proposition 8: Une intersection de compacts est compacte.

Théorème 9: (de Bolzano - Weierstrass)

(X, d) est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de X , on peut extraire une sous-suite convergente de X .

Proposition 10: Soit un espace compact, une suite qui admet une unique valeur d'adhérence converge.

Proposition 11: Un espace compact est complet.

Proposition 12: Un produit fini de compacts est compact.

Proposition 13: Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance produit usuelle avec $n \in \mathbb{N}^*$) sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 14: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite CV de (X, d) , et sa limite. Alors $I = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact. (TD)

Dans la suite, on suppose (X, d) compact.

II - Compacité et fonctions continues.

1) Premiers résultats.

Proposition 15: Soit $f: (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ une application continue. Alors $f(X)$ est compact.

Proposition 16: Soit $f: (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ une application continue et bijective. Alors $f^{-1}: (Y, \delta) \rightarrow (X, d)$ est continue (f est un homéomorphisme).

Contre exemple 17: Soit $f:]-\pi, \pi[\rightarrow \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$
 $\theta \mapsto e^{i\theta}$.
 est continue et bijective
 mais f^{-1} n'est pas continue au pt $(1, 0)$.

Théorème 18: (des bornes atteintes)

Soit $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors f est bornée et atteint ses bornes:

$$\exists c, d \in \mathbb{R} \text{ tq } f(c) = \min_{x \in E} f(x), \quad f(d) = \max_{x \in E} f(x).$$

(2) Uniforme continuité, approximation uniforme.

Théorème 19: (de Heine)

Soit $f: (X, d) \rightarrow (\mathbb{Y}, \delta)$ une application continue.
 sur un compact X alors f est uniformément continue.

Application 20: Une fonction continue et T -périodique
 est uniformément continue.

Théorème de Weierstrass 21: Toute fonction continue
 sur un segment est limite uniforme d'une suite de
 fonctions polynomiales.

Application 22: Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ tel que
 $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$. Alors $f \equiv 0$.

à
 montrer
 avec

(3) Point fixe.

Proposition 23: Soit (X, d) compact et $f: X \rightarrow X$ une
 application vérifiant:

$$\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad (*)$$

Alors f admet un unique point fixe.

Contre exemple 24: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ est continue et vérifie } x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

l'hypothèse (*) mais f est
 sans point fixe.

III - Compacité dans un espace vectoriel normé.

Théorème 25: Dans un espace vectoriel normé de dim.
 finie, tous les normes sont équivalentes.

Théorème 26: (de Riesz) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace
 vectoriel normé. Alors E est de dim finie si et
 seulement si $\overline{B_E(0, 1)}$ est compact.

DEV 2.

Corollaire 27: Toute applicatⁿ lin. d'un e.v.n de dim. finie
 dans un e.v.n (q, q) est continue.

Corollaire 28: Les parties compactes d'un e.v.n de dim.
 finie sont des parties fermées bornées.

Ex: de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. $\times$

Théorème 29: Supposons E de dim finie. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 continue. Si $f(x) = \inf_{x \in A} f(x)$ est minime et atteint son